1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл

4 Гауссовы интегралы и корреляционные функции

5 Двумерные теории бозонов и фермионов

6 Переход к операторному формализму

7 Двумерная конформная теория скалярного поля

7.1 Что мы узнали о континуальном интеграле и операторном формализме

Мы выяснили что:

- В квантовой механике функции Грина полей под знаком континуального интеграла отвечают матричным элементам (например вакуумным) для T-упорядоченного произведения операторов.

- Теорию двумерного свободного безмассового скалярного поля на цилиндре (пространственная окружность на временную прямую) можно проквантовать как систему бесконечного набора гармонических осцилляторов с коммутационными соотношениями
$$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{n+m,0}, \qquad n, m \in \mathbb{Z} \tag{7.1}$$
и гамильтонианом $H = \sum_{n>0} \alpha_n \alpha_n + \text{const}$. С точки зрения теории струн операторы $\frac{\alpha_{\pm n}}{\sqrt{|n|}}$ представляют собой операторы рождения ($n < 0$) и уничтожения ($n > 0$) струнных гармоник, а нулевая мода α_0 - импульс движения центра струны как целого.

- Цилиндр полезно отобразить на плоскость $z = e^{\tau + i\sigma}$ с двумя выколотыми точками. Хронологическое произведение при этом превращается в *радиальное упорядочение.* Гейзенберговы уравнения движения для скалярного поля на цилиндре решаются в виде производящей функции

$$X(z,\bar z) = X_0 - i\alpha_0 \log(z\bar z) + i\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n}{nz^n} + i\sum_{n\neq 0}\frac{\bar\alpha_n}{n\bar z^n} \tag{7.2}$$

так, что соответствующие производные дают голоморфные и антиголоморфные токи

$$i\partial X = J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_n}{z^{n+1}}, \qquad i\bar\partial X = \bar J(\bar z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\bar\alpha_n}{\bar z^{n+1}} \tag{7.3}$$

Хронологическое или радиальное упорядочение является достаточно банальным, и мы его часто никак не будем выделять. Проверим, например, нашу гипотезу для коррелятора двух голоморфных токов $\langle J(z)J(z')\rangle$. В операторном формализме при $|z| > |z'|$ это просто матричный элемент

$$\langle 0|J(z)J(z')|0\rangle = \sum_{n,k}\frac{\langle 0|\alpha_n\alpha_k|0\rangle}{z^{n+1}z'^{k+1}} \tag{7.4}$$

по вакууму

$$\begin{aligned} \alpha_n|0\rangle = 0, \quad & n\geq 0, \\ \langle 0|\alpha_n = 0, \quad & n \leq 0 \end{aligned} \tag{7.5}$$

где, в обозначениях Дирака, бра-вектора являются элементами двойственного модуля по отношению к кет-векторам. Таким образом,

$$\sum_{n,k}\frac{\langle 0|\alpha_n\alpha_k|0\rangle}{z^{n+1}z'^{k+1}} = \sum_{n>0,k<0}\frac{\langle 0|\alpha_n\alpha_k|0\rangle}{z^{n+1}z'^{k+1}} = \sum_{n>0,k<0}\frac{n\delta_{n+k,0}}{z^{n+1}z'^{k+1}} = \frac{1}{zz'}\sum_{n>0} n\left(\frac{z'}{z}\right)^n \tag{7.6}$$

где радиальное упорядочение обеспечивает сходимость при $\left|\frac{z'}{z}\right| < 1$. Сумма при этом тривиально вычисляется

$$\sum_{n>0} nq^n = q\frac{d}{dq}\sum_{n>0}q^n = q\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q} = \frac{q}{(1-q)^2} \tag{7.7}$$

и приводит к ответу

$$\langle J(z)J(z')\rangle = \frac{1}{zz'}\frac{z'/z}{(1-z'/z)^2} = \frac{1}{(z-z')^2} \tag{7.8}$$

который очевидным образом совпадает с результатом вычисления континуального интеграла

$$\langle J(z)J(z')\rangle = -\partial_z\partial_{z'}\langle X(z,\bar z)X(z',\bar z')\rangle = \partial_z\partial_{z'}\log|z-z'|^2 = \frac{1}{(z-z')^2} \tag{7.9}$$

где выбрана нормировку, в которой функция Грина двух скалярных полей

$$\langle X(z,\bar z)X(z',\bar z')\rangle = G(z,z') = -\alpha'\log|z-z'| = -\log|z-z'|^2 \tag{7.10}$$

7.2 Операторная алгебра

Посмотрим теперь на хронологическое произведение операторов $J(z)$ в квантовой теории. Из вида коррелятора $\langle 0|J(z)J(z')|0\rangle = \frac{1}{(z-z')^2}$ *очевидно*, что оно сингулярно при $z \to z'$. Попробуем ввести *нормальное произведение* операторных токов

$$: J(z)J(z') := J(z)J(z') - \langle J(z)J(z')\rangle \tag{7.11}$$

которое существует и в пределе совпадающих точек [1]. Разложив нормальное произведение в (7.11) в ряд Тейлора при $z \to z'$, для обычного (хронологического) произведения естественным образом получим ряд Лорана

$$J(z)J(z') \underset{z\to z'}{=} \frac{1}{(z-z')^2} + : J(z')^2 : + (z-z') : \partial J(z')J(z') : + \ldots \tag{7.12}$$

Это - простейший пример операторного разложения в свободной теории поля, общая гипотеза заключается в том, что аналогичная формула существует “всегда”.

В произвольной квантовой теории поля - гипотеза о том, что в пространстве всех “разумных” операторов существует операторное умножение

$$A_i(x)A_j(y) = \sum_k C_{ij}^k(x-y)A_k(y) \tag{7.13}$$

т.е. произведение любых двух операторов в разных точках можно разложить в линейную комбинацию по операторам в одной из них с коэффициентами, вообще говоря сингулярными при $x \to y$. Операторное равенство (7.13) понимается как равенство верное, будучи вставленным в *любую* корреляционную функцию

$$\begin{gathered}\langle A_i(x)A_j(y)A_{k_1}(z_1)\ldots A_{k_n}(z_n)\rangle = \sum_k C_{ij}^k(x-y)\langle A_k(y)A_{k_1}(z_1)\ldots A_{k_n}(z_n)\rangle \\ \langle A_{k_1}(z_1)\ldots A_{k_n}(z_n)\rangle = \frac{\int D\phi e^{-S} A_{k_1}(z_1)\ldots A_{k_n}(z_n)}{\int D\phi e^{-S}}\end{gathered} \tag{7.14}$$

а константы $\{C_{ij}^k(x)\}$ могут зависеть от чего угодно кроме, но они универсальны для любой корреляционной функции.

В абстрактной квантовой теории ничего больше сказать нельзя, кроме того, что (7.14) в принципе выражает любые корреляционный функции через структурные константы $\{C_{ij}^k(x)\}$ и средние от операторов $\langle A_k(z)\rangle$. Однако в теории с большой группой симметрии (например - конформной), на этии функции налагаются дополнительные условия, следующие из преобразований симметрии: скажем, в конформной теории поля все двух- и

[1] Кроме того очевидно, что $\langle : J(z)J(z') : \rangle = 0$.

трехточечные функции $\langle A_{k_1}(z_1)\dots A_{k_n}(z_n)\rangle$ при $n=2,3$ определяются с помощью симметрии с точностью до константы. Кроме того, для ответов на многие вопросы важно знать лишь сингулярные части функций $\{C_{ij}^k(x)\}$.

В свободной теории операторные разложения можно вычислять с помошью *теоремы Вика*, которая следует из того, что любая многоточечная корреляционная функция фундаментальных полей выражается через произведения парных корреляторов (свойство гауссова интеграла). Вследствие этого операторное разложение любых составных операторов выражается с помощью “спаривания” их элементарных составляющих, т.е. все коэффициенты $\{C_{ij}^k(x)\}$ выражаются через парные корреляторы фундаментальных полей.

7.3 Операторное разложение и коммутаторы

Сингулярность в операторном разложении связана с некоммутативностью операторов. Действительно, посмотрим на разложение

$$J(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_k}{z^{k+1}} \tag{7.15}$$

на плоскости с отмеченной точкой $z=0$, куда вставлен какой-либо оператор $\Phi(0)$ [2]. Действие на него компонент тока можно определить формулой Коши

$$\alpha_n|\Phi\rangle=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}dzz^nJ(z)|\Phi\rangle=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}dzz^nJ(z)\Phi(0)|0\rangle \tag{7.16}$$

эквивалентной операторному разложению (при $z'=0$)

$$J(z)\Phi(z')=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-z')^{k+1}}\alpha_k\Phi(z') \tag{7.17}$$

имеющему смысл, вообще говоря, лишь при условии $\alpha_k|\Phi\rangle=0$ для всех $k<k_0$. Определим теперь действие двух операторов последовательным способом

$$\alpha_n\alpha_m|\Phi\rangle=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}dzz^nJ(z)\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'}dz'z'^mJ(z')|\Phi\rangle \tag{7.18}$$

где контур C_0 обходит точку $z=0$ *вне* контура C_0', т.е. оператор α_n действует *после* α_m. Наоборот, для действия в обратном порядке

$$\alpha_m\alpha_n|\Phi\rangle=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'}dz'z'^mJ(z')\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}dzz^nJ(z)|\Phi\rangle \tag{7.19}$$

[2] Другими словами можно говорить о новом состоянии $|\Phi\rangle=\Phi(0)|0\rangle$.

контур C_0 следует провести *внутри* контура C'_0. Рассмотрим теперь коммутатор

$$\begin{aligned}[\alpha_n,\alpha_m]\Phi(0) &= -\frac{1}{4\pi^2}\left(\oint_{C_0}\oint_{C'_0}-\oint_{C'_0}\oint_{C_0}\right)dz dz' z^n J(z) z'^m J(z')\Phi(0) = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_0} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^n J(z)J(z')\Phi(0)\end{aligned} \tag{7.20}$$

Стянем теперь контур интегрирования $C_{z'}$ к точке $z=z'$ и воспользуемся операторным произведением токов (7.12), тогда

$$\begin{aligned}[\alpha_n,\alpha_m] &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_0} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^n J(z)J(z') = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_0} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^n \left(\frac{1}{(z-z')^2}+\dots\right)\end{aligned} \tag{7.21}$$

где все несингулярные члены можно выкинуть, так как они не дают вклада в интеграл. Вычисляя контурные интегралы, окончательно получим

$$[\alpha_n,\alpha_m] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_0} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz \frac{z^n}{(z-z')^2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_0} dz' z'^m \; n z'^{n-1} = n\delta_{n+m,0} \tag{7.22}$$

т.е. канонические коммутационные соотношения осцилляторов разложения скалярного поля.

Обратим внимание теперь на оператор

$$T(z) = \tfrac{1}{2} : J(z)^2 := -\tfrac{1}{2} : \partial X(z)^2 : \tag{7.23}$$

голоморфной компоненты тензора энергии-импульса. Рассмотрим его операторное разложение с током $J(z)$. Удобно ввести понятия спаривания

$$\begin{aligned}&\underbrace{J(z)J(z')} = \langle J(z)J(z')\rangle = \frac{1}{(z-z')^2} \\ &J(z)J(z') =: J(z)J(z') : + \underbrace{J(z)J(z')}\end{aligned} \tag{7.24}$$

тогда

$$\begin{aligned}T(z)J(z') &= \tfrac{1}{2} : J(z)^2 : \; J(z') = 2\cdot\tfrac{1}{2}J(z)\underbrace{J(z)J(z')} + \tfrac{1}{2} : J(z)^2 \; J(z') := \\ &= \frac{J(z)}{(z-z')^2} + \tfrac{1}{2} : J(z')^3 : + O(z-z') = \frac{J(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial J(z')}{z-z'} + \dots\end{aligned} \tag{7.25}$$

где мы опустили все несингулярные при $z \to z'$ вклады.

Вычислим, наконец, в теории скалярного поля, сингулярные члены операторного произведения

$$\begin{aligned} T(z)T(z') &= \tfrac{1}{2} : J(z)^2 : \tfrac{1}{2} : J(z')^2 := \\ = \tfrac{1}{2} \underbrace{J(z)\underbrace{J(z)J(z')}J(z')}&+ : J(z)\underbrace{J(z)J(z')}J(z') : + \frac{1}{4} : J(z)^2 J(z')^2 := \\ &= \tfrac{1}{2}\langle J(z)J(z')\rangle^2 + \langle J(z)J(z')\rangle : J(z)J(z') : + \ldots = \\ &= \frac{1}{2(z-z')^4} + \frac{:J(z')^2:}{(z-z')^2} + \frac{:J(z')\partial J(z'):}{z-z'} + \ldots = \\ &= \frac{1}{2(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{z-z'} + \ldots \end{aligned} \tag{7.26}$$

т.е. операторное разложение имеет вид

$$T(z)T(z') = \frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{z-z'} + \ldots \tag{7.27}$$

где для скалярного поля число (центральный заряд алгебры Вирасоро) $c = 1$.

Для коммутационных соотношений алгебры Вирасоро представим

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}} \tag{7.28}$$

и рассмотрим аналогичные токовым действия

$$L_n L_m |\Phi\rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz z^{n+1} T(z) \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'_0} dz' z'^{m+1} T(z') |\Phi\rangle \tag{7.29}$$

где опять же контур C_0 обходит точку $z = 0$ *вне* контура C'_0, т.е. оператор L_n действует *после* L_m. Для действия в обратном порядке

$$L_m L_n |\Phi\rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'_0} dz' z'^{m+1} T(z') \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz z^{n+1} T(z) |\Phi\rangle \tag{7.30}$$

контур C_0 следует провести *внутри* контура C'_0. Переходя к коммутатору

$$\begin{aligned} [L_n, L_m]\Phi(0) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\oint_{C_0} \oint_{C'_0} - \oint_{C'_0} \oint_{C_0} \right) dz dz' z^{n+1} T(z) z'^{m+1} T(z') \Phi(0) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'_0} dz' z'^{m+1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{z'}} dz z^{n+1} T(z) T(z') \Phi(0) \end{aligned} \tag{7.31}$$

и стягивая контур интегрирования $C_{z'}$ к точке $z = z'$ и воспользуемся операторным произведением (7.27). В результате имеем

$$
\begin{gathered}
[L_n, L_m] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_0} dz' z'^{m+1} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^{n+1} T(z) T(z') = \\
= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_0} dz' z'^{m+1} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^{n+1} \left(\frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{z-z'} + \ldots\right)
\end{gathered} \tag{7.32}
$$

где все несингулярные члены опять же можно выкинуть, так как они не дают вклада в интеграл. Вычисляя контурные интегралы, окончательно получим

$$
\begin{gathered}
[L_n, L_m] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_0} dz' z'^{m+1} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^{n+1} \left(\frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{z-z'}\right) = \\
= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_0} dz' z'^{m+1} \left(\frac{c}{2}\frac{(n+1)n(n-1)}{6} z'^{n-2} + (n+1) z'^{n} 2T(z') + z'^{n+1}\partial T(z')\right) = \\
= \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} + 2(n+1)L_{n+m} - (n+m+2)L_{n+m}
\end{gathered} \tag{7.33}
$$

что представляет собой коммутационные соотношения *алгебры Вирасоро*

$$
[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \qquad n, m \in \mathbb{Z} \tag{7.34}
$$

Про нее можно сказать, что

- Алгебра Вирасоро является центрально расширенной (если $c \neq 0$) бесконечномерной алгеброй Ли векторных полей на окружности $l_n = -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}$, $[l_n, l_m] = (n-m)l_{n+m}$, голоморфно продолженных на цилиндр и генерирующих конформные преобразования $\delta_\epsilon z = -\epsilon l_n z = \epsilon z^{n+1}$;

- центральный генератор $[c, L_n] = 0$ принимает значения в числах, зависящие от конкретного представления алгебры;

- в теории свободного скалярного поля

$$
T(z) = \tfrac{1}{2} : J(z)^2 := \tfrac{1}{2}\sum_{n,k} \frac{: \alpha_n \alpha_k :}{z^{k+n+2}} \tag{7.35}
$$

  генераторы $L_n = \frac{1}{2}\sum_{m+k=n} : \alpha_m \alpha_k :$ действуют в модуле Фока-Гейзенберга. В этом представлении центральный заряд $c = 1$.

Заметим, что вывод коммутационных соотношений (7.33), *не зависит* от представления генераторов алгебры Вирасоро, т.к. не опирается на теорию свободного скалярного поля, а использует лишь операторное разложение (7.27).