Листок 4, принимается 16.12

4.1. Пусть L – одномерное комплексное расслоение над многообразием X. Покажите, что подмногообразие X, заданное нулями его сечения общего положения (что это значит?) двойственно по Пуанкаре первому классу Черна L.

4.2. Над комплексным проективным пространством $\mathbb{CP}^n$ построим одномерное комплексное расслоение $\mathcal{O}(-1)$ (оно называется *тавтологическим*) следующим образом: слоем над прямой $l \in \mathbb{C}^{n+1}$, проходящей через 0 является сама эта прямая. Обозначим через $\mathcal{O}(1)$ двойственное расслоение. Предъявите ненулевое сечение $\mathcal{O}(1)$ и вычислите его первый класс Черна.

4.3. Пусть E – n-мерное комплексное векторное расслоение над пространством X. Постройте естественное расслоение $\pi\colon \mathbb{P}(E) \to X$ слои которого суть проективизации слоев E, а также линейное расслоение $\mathcal{O}_E(-1)$ над $\mathbb{P}(E)$ сужение которого на слой – тавтологическое расслоение. Покажите, что $\mathcal{O}_E(-1)$ вкладывается в π^*E в качестве прямого слагаемого.

Будем считать известным (если можете – докажите), что когомологии $H^*(\mathbb{P}(E))$ (см. предыдущую задачу), как модуль над $H^*(X)$ свободно порождаются классами 1, ξ, $\ldots$, ξ^{n-1}, где ξ – первый класс Черна $\mathcal{O}_E(1)$.

4.4. (*Принцип расщепления*) Покажите, пользуясь предыдущей задачей, что полный класс Черна $c(E) = 1 + \sum_{0<i\leq n} c_i(E)$ комплексного n-мерного векторного расслоения E можно вычислить, используя следующие аксиомы:

1. $c(L) = 1 + c_1(L)$ для линейного L;
2. $c(p^*E) = p^*c(E)$ для любого отображения $p\colon X \to Y$ и E над Y;
3. $c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$.

4.5. Покажите, что в обозначениях, введенных выше,

$$\xi^n = -\sum_{0<i\leq n} c_i(\pi^*E) \wedge \xi^{n-i}.$$