Пучки и гомологическая алгебра

С.М.Натанзон

Содержание

1. Введение.

Хорошо известно, что непостоянная функция, голоморфная на комплексной плоскости, неограничена. Другими словами, в некоторых случаях по локальным свойствам функций (например голоморфность) можно судить о ее глобальных свойствах. Взаимосвязь локальных и глобальных свойств позволяет исследовать явление в целом стартуя с его, локальных, обычно проще контролируемых, свойств.

Необходимый для этого математический аппарат был создан в середине прошлого века. Он основан на *теории пучков.* Свойства пучков автоматизируют свойства тензорных полей на многообразиях. Пучкам отвечают коммутативные группы, называемые *группами когомологий со значениями в пучке (или, что тоже самое, с коэффициентами в пучке)*, и специальные элементы групп когомологий многообразия со значениями в постоянном пучке, называемые *классами Черна.* Группы когомологий и классы Черна определяют важнейшие фундаментальные свойства многообразия. Эти понятия являются основным языком всех разделов современной геометрии. Настоящий курс является введением в теорию пучков и связанных с ней структур.

Первая часть курса посвящена когомологиям со значениями в пучках. Мы даем несколько по виду совершенно не похожих друг на друга конструкций когомологий: с помощью ацикличных резольвент, через семейства покрытий (когомологии Чеха) и, для гладких многообразий, с помощью дифференциальных форм (когомологии де Рама) и сингулярных коцепей (сингулярные когомологии). Мы доказываем что все эти конструкции приводят к одинаковым группам когомологий (теоремы Лере и де Рама). Более того, мы показываем, что когомологии реализуют единственный естественный функтор из категории пучков абелевых групп в категорию абелевых групп, переводящий короткую точную последовательность пучков в длинную точную последовательность групп.

Вторая часть курса посвящена самому "массовому"типу пучков: локально свободным пучкам, то есть пучкам сечений локально тривиальных векторных расслоений. Мы определяем и исследуем универсальное расслоение. Далее мы изучаем простейшие свойства пучков и расслоений на комплексных многообразиях, их когомологии Дольбо и числа Ходжа. В заключении мы подробно обсуждаем замечательные свойства голоморфных расслоения ранга 1 .

2. Пучки.

2.1. **Основные определения.** Напомним, что *топологическим пространством* называется множество X с системой подмножеств $\mathfrak{U} = \{U\}$, называемых *открытыми* такой, что

1) $X, \emptyset \in \mathfrak{U}$,

2) объединение $\bigcup U_\alpha$ произвольного числа $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$,

2) пересечение $\bigcap U_\alpha$ конечного числа $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$.

Дополнение $X - U$ к отрытому множеству $U \in \mathfrak{U}$ называется *замкнутым множеством.*

Предпучком $\mathcal{F}$ над топологическом пространством $(X, \mathfrak{U})$ называется

a) набор множеств $\{\mathcal{F}(U) | U \in \mathfrak{U}, U \neq \emptyset\}$, называемый *сечениями над* U,

b) набор отображений $\{r^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V) |\ U, V \in \mathfrak{U}, V \subset U\}$, называемых *ограничениями*, такой, что

1)$r^U_U = 1_U$ — тождественное отображение;
2)$r^U_W = r^V_W r^U_V$ при $W \subset V \subset U$.

Предпучок $\mathcal{F}$ называется *предпучком групп (колец, модулей и т.п)*, если все множества $\mathcal{F}(U)$ являются группами (соответственно кольцами, модулями и т.п) и все отображения r^U_V являются гомоморфизмами соответствующих структур.

Пучком называется предпучок $\mathcal{F}$, в котором выполнены следующие аксиомы:
1) Пусть $U = \bigcup U_i$; $s, t \in \mathcal{F}(U)$ и $r^U_{U_i}(s) = r^U_{U_i}(t)$ для всех U_i. Тогда $s = t$.
2) Пусть $U = \bigcup U_i$; $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ для всех i и $r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$ для всех i, j. Тогда существует $s \in \mathcal{F}(U)$ такое, что $r^U_{U_i}(s) = s_i$.

Пример 2.1. *Пучок отображений топологического пространства* X *в множество* Y. *Здесь $\mathcal{F}(U)$ — множество всех отображений открытого множества U в множество Y, а r^U_V — ограничение отображения на подмножество. Если все множество Y является группой (соответственно кольцом, модулем и т.п), то возникает пучок групп (соответственно колец, модулей и т.п).*

Пример 2.2. *Постоянный пучок*. *Если в предыдущем примере в качестве $\mathcal{F}(U)$ рассматривать лишь локально постоянные отображения, то возникает пучок, называемый постоянным. (Напомним: локально постоянное отображение — это отображение, постоянное в некоторой окрестности каждой точки.)*

Пример 2.3. *Пучок непрерывных отображений*. *Если в примере 2.1 считать, что Y — тоже топологическое пространство и $\mathcal{F}(U)$ — непрерывные отображения, то возникает пучок непрерывных отображений.*

Пример 2.4. *Пучок гладких отображений*. *Если в примере 2.3 считать, что X и Y — гладкие многообразия и $\mathcal{F}(U)$ — гладкие отображения, то возникает пучок гладких отображений. Он называется пучком гладких функций, если $Y = \mathbb{R}$.*

Пример 2.5. *Пучок голоморфных отображений*. *Если в примере 2.3 считать, что X и Y — комплексные многообразия и $\mathcal{F}(U)$ — голоморфные функции, то возникает пучок пучок голоморфных отображений. Он называется пучком голоморфных функций, если $Y = \mathbb{C}$. .*

Последние 2 пучка, несмотря на похожесть определений обладают принципиально разными свойствами.

Пример 2.6. *Пучок тензорных полей*. *Если X — гладкое или комплексное многообразие и $\mathcal{F}(U)$ — тензорные поля на U, то возникает пучок тензорных полей.*

Упражнение 2.1. *Докажите, что конструкции, описанные в примерах, действительно порождают пучки.*

Упражнение 2.2. *Придумайте предпучок, не являющийся пучком.*

Говорят, что *предпучок $\mathcal{A}$ является подпредпучком пучка $\mathcal{B}$* (и пишут $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$), если $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{B}(U)$ для любого открытого множества U.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — предпучки на X. Их *морфизмом* $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется набор отображений $\{h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) | U \in \mathfrak{U}\}$ такой, что $h_V r_V^U = r_V^U h_U$. Морфизм называется *изоморфизмом*, если все отображения взаимно однозначны.

Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются предпучками групп, колец, модулей и т.п, то морфизмами таких предпучков считаются лишь морфизмы $\{h_U\}$, порождающие гомоморфизмы соответствующих структур.

Упражнение 2.3. *Докажите, что ядра и образы отображений h_U порождают подпредпучки $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathcal{F}$ и $\mathrm{Im}(h) \subset \mathcal{G}$.*

Морфизмы предпучков групп, колец, модулей и т.п называются *мономорфизмами, эпиморфизмами или изоморфизмами*, если такими являются все отображения $\{h_U\}$.

Упражнение 2.4. *Пусть множества $\mathcal{F}(U)$ из примера 2.6 состоят из гладких или голоморфных (когда X — комплексное многообразие) тензорных полей. Докажите, что тогда множества $\mathcal{F}(U)$ также образуют пучок, называемый пучком гладких (соответственно голоморфных) тензорных полей. Докажите, что этот пучок мономорфно отображается в пучок всех тензорных полей из примера 2.6.*

2.2. **Накрытия.** Сюръективный локальный гомеоморфизм топологических пространств $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ назовем *накрытием* (это определение отличается от стандартного, но удобно для изучения пучков).

Сечением накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ на подмножестве $U \subset X$ называется отображение $s : U \to \widetilde{\mathcal{F}}$ такое, что $\pi s = 1_U$ — тождественное отображение. Обозначим через $\mathcal{E}(U)$ множество всех сечений и через $\overline{\mathcal{F}(U)}$ множество непрерывных сечений над $U \subset X$.

Упражнение 2.5. *Докажите, что множества сечений $\{\mathcal{E}(U) | U \in \mathfrak{U}\}$ и $\{\overline{\mathcal{F}(U)} | U \in \mathfrak{U}\}$ вместе с естественными отображениями ограничений сечений на подмножества образуют пучки. Они называется пучком всех сечений и пучком непрерывных сечений накрытия соответственно.*

Наша ближайшая цель — сопоставить всякому предпучку $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U), r_V^U\}$ на X некоторое накрытие $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$.

Будем считать, что сечения $s \in \mathcal{F}(V)$ и $t \in \mathcal{F}(W)$ *эквивалентны в точке* $x \in V \cap W$ (обозначается $s \sim_x t$), если существует открытое множество $x \in U \subset V \cap W$ такое что $r_U^V(s) = r_U^W(t)$. Обозначим через $\mathcal{F}_x = \big(\bigcup\limits_{U \ni x} \mathcal{F}(U)\big) / \sim_x$ множество классов эквивалентности всех сечений в точке x.

Положим $\widetilde{\mathcal{F}} = \bigcup\limits_{x \in X} \mathcal{F}_x$. Сопоставим точке $x \in U \in \mathfrak{U}$ и сечению $s \in \mathcal{F}(U)$ класс эквивалентности $s_x \in \mathcal{F}_x$ сечения s в точке x. Обозначим через $s_U = \bigcup\limits_{x \in U} s_x \subset \widetilde{\mathcal{F}}$ объединение таких классов. Зададим на $\widetilde{\mathcal{F}}$ топологию, считая, что открытыми являются пустое множество, все множества вида s_U и все объединения таких множеств.

Упражнение 2.6. *Доказать, что описанная конструкция действительно задает структуру топологического пространства на $\widetilde{\mathcal{F}}$. Доказать, что отображение $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$, где $\pi(\mathcal{F}_x) = x$, является накрытием.*

Упражнения 2.5 и 2.6 позволяют сопоставить любому предпучку $\mathcal{F}$ пучок всех сечений $\mathcal{E}$ и пучок $\overline{\mathcal{F}}$ непрерывных сечений накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$.

Сечению $s \in \mathcal{F}(U)$ (мы будем называть его *абстрактным сечением*) отвечает множество $s_U \subset \widetilde{\mathcal{F}}$, образующее сечение $\bar{s} \in \mathcal{E}(U)$, которое мы будем называть его *геометрическим сечением.*

Упражнение 2.7. *Доказать, что $\bar{s} \in \overline{\mathcal{F}}(U)$, причем соответствия $s \mapsto \bar{s}$ порождает семейство отображений $\tau_U : \mathcal{F}(U) \to \overline{\mathcal{F}}(U)$, образующее морфизм предпучков $\tau_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \overline{\mathcal{F}}$. Боле того, если $\mathcal{F}$ — предпучок групп, то $\mathcal{E}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ — пучки групп и $\tau_{\mathcal{F}}$ — морфизм предпучков групп.*

Упражнение 2.8. *Доказать, что морфизм предпучков $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ естественно порождает локальный гомеоморфизм $\widetilde{h} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \widetilde{\mathcal{B}}$, которое, в свою очередь, естественно порождает морфизм пучков $\overline{h} : \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathcal{B}}$ такой, что $\tau_{\mathcal{B}} h = \overline{h}\tau_{\mathcal{A}}$.*

Теорема 2.1. *Если $\mathcal{F}$ — пучок, то $\tau_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \overline{\mathcal{F}}$ — изоморфизм пучков.*

Доказательство. a) *Инъективность.* Пусть $s', s" \in \mathcal{F}(U)$ — абстрактные сечения и $\tau_U(s') = \tau_U(s")$ — отвечающие им геометрические сечения. Рассмотрим произвольную точку $x \in U$. Тогда $s'_x = s"_x$ и, следовательно, существует содержащее точку x открытое множество $V_x \subset U$ такое, что $r^U_{V_x}(s') = r^U_{V_x}(s")$. Таким образом, существует покрытие $U = \bigcup_{x\in U} V_x$ такое, что $r^U_{V_x}(s') = r^U_{V_x}(s")$. Согласно первой аксиоме пучка отсюда следует, что $s' = s"$.

b) *Сюръективность.* Пусть $\bar{s} \in \overline{\mathcal{F}}(U)$ — геометрическое сечение и $x \in U$. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$ и ее прообраза $\bar{x} = \overline{\mathcal{F}}_x \cap \bar{s}$. Согласно нашим определениям, точка $\bar{x}$ имеет окрестность $\bar{s}_x \subset \bar{s}$, порожденную некоторым сечением $s_x \in \mathcal{F}(U_x)$ на $U_x \in U$.

Мы построили покрытие $X = \cup_{x\in X} U_x$ с сечениями $s_x \in \mathcal{F}(U_x)$. На пересечении $U_x \cap U_y$ абстрактные сечения s^x и s^y порождают одно и то же геометрическое сечение $\bar{s}^x|_{U_x\cap U_y} = \bar{s}|_{U_x\cap U_y} = \bar{s}^y|_{U_x\cap U_y}$. Поэтому, согласно уже доказанному свойству инъективности, $s^x|_{U_x\cap U_y} = s^y|_{U_x\cap U_y}$. Ввиду аксиомы 2) пучка, отсюда следует существование сечения $s \in \mathcal{F}(U)$, порождающего сечение $\bar{s}$. □

Следствие 2.1. *Каждый пучок изоморфен пучку непрерывных сечений некоторого накрытия.*

3. Когомологии с коэффициентами в пучке.

3.1. **Каноническая резольвента пучка.** *Далее мы считаем, что все рассматриваемые пучки являются пучками коммутативных групп.*

Рассмотрим произвольный подпучок $\mathcal{A}$ пучка $\mathcal{B}$.

Упражнение 3.1. *Доказать, что, соответствие $U \mapsto \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$ порождает предпучок. Всегда ли это пучок?*

Пучок $\mathcal{C}$, порожденный предпучком $U \mapsto \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$, называется *фактор-пучком* $\mathcal{B}/\mathcal{A}$.

Говорят, что *последовательность гомоморфизмов групп* $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ *точна в* B, если $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(h)$. Говорят, что *последовательность морфизмов* $\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C}$ *пучков групп над* X *точна в* $\mathcal{B}$, если для любого $x \in X$ индуцированная последовательность групп $\mathcal{A}_x \xrightarrow{g} \mathcal{B}_x \xrightarrow{h} \mathcal{C}_x$ точна в $\mathcal{B}_x$. Говорят, что последовательность морфизмов групп пучков над X $\mathcal{A}_1 \xrightarrow{g} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{h} \mathcal{A}_3 \to \dots \mathcal{A}_n \to \dots$ *точна*, если она точна в каждом члене начиная со второго.

Упражнение 3.2. *Доказать, что естественное вложение подпучка в пучок вместе с естественной проекцией пучка на фактор-пучок порождают точную последовательность пучков $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$*

Упражнение 3.3. *Пусть $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций на $\mathbb{C} - 0$, рассматриваемый как группа по сложению, $\mathcal{Z}$ — подпучок постоянных целочисленных функций и $\mathcal{O}^*$ — пучок не обращающихся в 0 голоморфных функций* *на $\mathbb{C}-0$, рассматриваемый как группа по умножению. Тогда последовательность пучков $0 \to \mathcal{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$, где $\exp(f)(z) = e^{2\pi i f(z)}$, точна, а последовательность гомоморфизмов групп $0 \to \mathcal{Z}(\mathbb{C}-0) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\mathbb{C}-0) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*(\mathbb{C}-0) \to 0$ не точна.*

Предыдущее упражнение дает пример точной последовательности последовательности пучков, порождающей не точную последовательность сечений. Неточности такого типа характеризуют пучок и являются, по существу, предметом *теории когомологий.*

Точная последовательность пучков вида $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ называется *резольвентой пучка* $\mathcal{F}$.

Упражнение 3.4. *Доказать, что индуцированная резольвентой $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$, последовательность групп $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots$, удовлетворяет условиям $\tilde{\alpha}_0\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_{n+1}\tilde{\alpha}_n = 0$ и $\mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_0) = \mathrm{Im}(\tilde{\alpha})$*

Сопоставим произвольному пучку $\mathcal{F}$ резольвенту с помощью следующей конструкции. Согласно теореме 2.1, пучок непрерывных сечений $\overline{\mathcal{F}}$ накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ естественно изоморфен пучку $\mathcal{F}$. Рассмотрим пучок $\mathcal{E}(U) = \{s : U \to \widetilde{\mathcal{F}} | \pi s = 1\}$ всех сечений накрытия π. Естественное вложение непрерывных сечений в произвольные порождает точную в $\mathcal{F}$ последовательность пучков $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}(\mathcal{F})$. Положим $\mathcal{F}^0 = \mathcal{E}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}^1 = \mathcal{E}(\mathcal{F}^0/\mathrm{Im}(\alpha))$ и обозначим через $\alpha_0 : \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^0/\mathrm{Im}(\alpha) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}^0/\mathrm{Im}(\alpha)) = \mathcal{F}^1$ композицию естественных гомоморфизмов. Мы получили последовательность гомоморфизмов пучков $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1$. Продолжим процесс, то есть положим $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{E}(\mathcal{F}^n/\mathrm{Im}(\alpha_{n-1}))$, и обозначим через $\alpha_n : \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^n/\mathrm{Im}(\alpha_{n-1}) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}^n/\mathrm{Im}(\alpha_{n-1})) = \mathcal{F}^{n+1}$ композицию естественных гомоморфизмов.

Упражнение 3.5. *Доказать, что последовательность пучков $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ является резольвентой.*

Построенная резольвента $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ называется *канонической резольвентой пучка* $\mathcal{F}$.

3.2. **Когомологии.** Пусть $\mathcal{F}$ — пучок над X, $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ — его каноническая резольвента и $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots$ — индуцированная последовательность групп глобальных сечений. Тогда группы $H^0(X,\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_0) = \mathcal{F}(X)$, $H^n(X,\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})$ называются *n-тыми группами когомологий пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$*. Их прямая сумма $H^*(X,\mathcal{F})$ называется *(полной) группой когомологий пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$.*

Это понятие позволяет сопоставить группу произвольному пучку и использовать методы алгебры для изучения геометрических объектов. Простейшие группы такого типа (и мы увидим это далее) можно описать и чисто топологическими методами. Именно так их впервые построил А. Пуанкаре.

Следующая теорема показывает, что соответствие "пучок"$\mapsto$ "когомологии"является функториальным.

Теорема 3.1. *Морфизм* $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B}$ *пучков над* X *порождает гомоморфизмы групп когомологий* $h_n : H^n(X, \mathcal{A}) \to H^n(X, \mathcal{B})$ *такие, что:*

1) $h_0 = h_X : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X)$ *— гомоморфизм глобальных сечений;*

2) если h *— тождественный морфизм, то* h_n *— тождественный гомоморфизм для любого* n*;*

3) если $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C}$ *— последовательность морфизмов пучков, то* $(lh)_n = l_n h_n$.

Доказательство. Рассмотрим накрытия $f : Y \to X$ и $g : Z \to X$, пучки непрерывных сечений которых изоморфны пучкам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Согласно упражнению 2.8, морфизм h порождает локальный гомеоморфизм, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{h}} & Z \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & = & X \end{array}$$

Диаграмма порождает морфизм $h_0 : \mathcal{A}^0 = \mathcal{E}(\mathcal{A}) \to \mathcal{E}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^0$ пучков всех сечений накрытий. Этот морфизм замыкает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h_0} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 \end{array}$$

где α и β — вложения непрерывных сечений в произвольные. Таким образом, $h_0(\mathrm{Im}\alpha) \subset \mathrm{Im}\beta$.

Рассмотрим накрытия $f^0 : Y^0 \to X$ и $g^0 : Z^0 \to X$, отвечающие пучкам $\mathcal{A}^0/\mathrm{Im}(\alpha)$, и $\mathcal{B}^0/\mathrm{Im}(\beta)$. Морфизм $h_0 : \mathcal{A}^0 \to \mathcal{B}^0$ порождает морфизм $\mathcal{A}^0/\mathrm{Im}(\alpha) \to \mathcal{B}^0/\mathrm{Im}(\beta)$, который порождает локальный гомеоморфизм $\tilde{h}_0$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y^0 & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & Z^0 \\ \downarrow{\scriptstyle f^0} & & \downarrow{\scriptstyle g^0} \\ X & = & X \end{array}$$

Эта диаграмма порождает морфизм $h_1 : \mathcal{A}^1 = \mathcal{E}(\mathcal{A}^0/\mathrm{Im}(\alpha)) \to \mathcal{B}^1 = \mathcal{E}(\mathcal{B}^0/\mathrm{Im}(\beta))$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{A}^1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h_0} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 & \xrightarrow{\beta_0} & \mathcal{B}^1 \end{array}$$

Продолжая процесс, получаем коммутативную диаграмму морфизмов пучков, строки которой — это канонические резольвенты пучков $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{A}^1 & \xrightarrow{\alpha_1} & \ldots \mathcal{A}^n & \xrightarrow{\alpha_n} \\ & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h_0} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_n} & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 & \xrightarrow{\beta_0} & \mathcal{B}^1 & \xrightarrow{\beta_1} & \ldots \mathcal{B}^n & \xrightarrow{\beta_n} \end{array}.$$

Она порождает коммутативную диаграмму гомоморфизмов групп

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha} & \mathcal{A}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_0} & \mathcal{A}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_1} & \dots\mathcal{A}^n(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_n} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h_0} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h_1} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h_n} & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B}(X) & \xrightarrow{\tilde\beta} & \mathcal{B}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_0} & \mathcal{B}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_1} & \dots\mathcal{B}^n(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_n}
\end{array}.$$

Если $a \in \mathrm{Ker}(\tilde\alpha_n)$ и $b = \tilde h_n(a)$, то $\tilde\beta_n(b) = \tilde\beta_n(\tilde h_n(a)) = \tilde h_{n+1}(\tilde\alpha_n(a)) = 0$. Таким образом, $\tilde h_n(\mathrm{Ker}(\tilde\alpha_n)) \subset \mathrm{Ker}(\tilde\beta_n)$. Кроме того, если $a \in \mathrm{Im}(\tilde\alpha_{n-1})$ и $b = \tilde h_n(a)$, то $a = \tilde\alpha_{n-1}(\hat a)$ и $b = (\tilde\beta_{n-1}(\tilde h_{n-1}\hat a)) \in \mathrm{Im}(\tilde\beta_{n-1})$. Таким образом, $\tilde h_n(\mathrm{Im}(\tilde\alpha_{n-1})) \subset \mathrm{Im}(\tilde\beta_{n-1})$.

Следовательно, гомоморфизм $\tilde h_n$ порождает гомоморфизм $h_n : H^n(X, \mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(\tilde\alpha_n)/\mathrm{Im}(\tilde\alpha_{n-1}) \to \mathrm{Ker}(\tilde\beta_n)/\mathrm{Im}(\tilde\beta_{n-1}) = H^n(X, \mathcal{B})$. Его свойства 1) и 2) непосредственно следуют из определений.

Для доказательства свойства 3) рассмотрим коммутативную диаграмму резольвент

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{A}^1 & \xrightarrow{\alpha_1} & \dots\mathcal{A}^n & \xrightarrow{\alpha_n} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h^0} & & \downarrow{\scriptstyle h^1} & & \downarrow{\scriptstyle h^n} & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 & \xrightarrow{\beta_0} & \mathcal{B}^1 & \xrightarrow{\beta_1} & \dots\mathcal{B}^n & \xrightarrow{\beta_n} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle l} & & \downarrow{\scriptstyle l^0} & & \downarrow{\scriptstyle l^1} & & \downarrow{\scriptstyle l^n} & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{C}^0 & \xrightarrow{\gamma_0} & \mathcal{C}^1 & \xrightarrow{\gamma_1} & \dots\mathcal{C}^n & \xrightarrow{\gamma_n}
\end{array},$$

порождающую коммутативную диаграмму групп

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha} & \mathcal{A}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_0} & \mathcal{A}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_1} & \dots\mathcal{A}^n(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_n} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h_0} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h_1} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h_n} & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B}(X) & \xrightarrow{\tilde\beta} & \mathcal{B}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_0} & \mathcal{B}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_1} & \dots\mathcal{B}^n(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_n} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\tilde l} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde l_0} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde l_1} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde l_n} & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & \mathcal{C}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma_0} & \mathcal{C}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma_1} & \dots\mathcal{C}^n(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma_n}
\end{array}.$$

Из наших определений непосредственно следует, что морфизм пучков $l^n h^n$ порождает произведение гомоморфизмов $\tilde l_n \tilde h_n$. Таким образом, $(\tilde{lh})_n = \tilde l_n \tilde h_n$ откуда $(lh)_n = l_n h_n$ □

4. Точные последовательности.

4.1. **Мягкие пучки.** Далее мы считаем, что все рассматриваемые топологические пространства X нормальны и парокомпактнны.Топологическое пространство X называется *нормальным*, если выполнена следующая аксиома отделимости. Для любых не пересекающихся замкнутых подмножеств $S, T \subset X$ существуют содержащие их непересекающиеся открытые множества $X \supset U \supset S$, $X \supset V \supset T$.

Парокомпактом называется пространство X, в любое открытое покрытие которого можно вписать локально конечное консервативное замкнутое покрытие. Объясним эти термины. Говорят, что покрытие *локально конечно*, если у любой точки найдется окрестность, пересекающееся лишь с конечным числом элементов покрытия. Говорят, что покрытие $X = \bigcup_{\gamma\in G} S_\gamma$ *вписано в покрытие* $X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$, если для любого U_α существует S_γ такое, что $S_\gamma \subset U_\alpha$. Покрытие замкнутыми множествами $X = \bigcup_{\gamma\in G} S_\gamma$ называется *консервативным*, если для любого подмножества индексов $\Gamma \subset G$ множество $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma$ — замкнуто.

Все метризуемые пространства и, в частности, топологические многообразия являются нормальными паракомпактоми. Топологическая структура пространства X порождает структуру топологического пространства на любом замкнутом подмножестве $S \subset X$. Открытые подмножества S — это пересечения открытых подмножеств X с S. Всякое замкнутое подмножество паракомпакта — паракомпакт.

Отождествим произвольный пучок $\mathcal{F}$ над над топологическим пространством X с пучком непрерывных сечений порожденного им накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ (теорема 2.1). Определим для замкнутого подмножества $S \subset X$ множество $\mathcal{F}(S)$ как множество непрерывных сечений π над S. Эта конструкция порождает отображения ограничения $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(S)$.

Пучок $\mathcal{F}$ над топологическим пространством X называется *мягким*, если отображение $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(S)$ сюръективно, для любого замкнутого подмножества $S \subset X$, то есть любое сечение над S продолжается до сечения над X.

Упражнение 4.1. *Доказать, что*

1. *Пучок $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ произвольных сечений накрытия — мягкий.*
2. *Пучок гладких функций на $\mathbb{R}^n$ — мягкий.*
3. *Пучок голоморфных функций на $\mathbb{C}$ — не мягкий.*
4. *Постоянный пучок (т.е. пучок локально постоянных функций) — не мягкий.*

Как и раньше, говоря о пучках мы будем иметь в виду пучки над фиксированным пространством X.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — мягкий пучок и $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \to 0$ — точная последовательность пучков. Тогда последовательность групп $0 \to \mathcal{A}(X) \xrightarrow{\tilde g} \mathcal{B}(X) \xrightarrow{\tilde h} \mathcal{C}(X) \to 0$ тоже точна.*

Доказательство. Точность в члене $\mathcal{A}(X)$ сразу следует из точности последовательности пучков в члене $\mathcal{A}$. Точность в члене $\mathcal{B}(X)$ означает, что для любого сечения $b \in \mathcal{B}(X)$ существует переходящее в него под действием $\tilde g$ сечение $a \in \mathcal{A}$. Из точности последовательности пучков в члене $\mathcal{B}$ следует, что для любого $x \in X$ существует окрестность U_x и сечение $a_{U_x} \in A(U_x)$ такие, что $\tilde g(a_{U_x})$ — это ограничение b на U_x. Таким образом $\tilde g(a_{U_x} - a_{U_y}) = 0$ на $U_x \cap U_y$. Ввиду точности в члене $\mathcal{A}(U_x \cap U_y)$ последовательности $0 \to \mathcal{A}(U_x \cap U_y) \xrightarrow{\tilde g} \mathcal{B}(U_x \cap U_y) \xrightarrow{\tilde h} \mathcal{C}(U_x \cap U_y) \to 0$ отсюда следует, что ограничения сечений a_{U_x} и b_{U_x} на $U_x \cap U_y$ совпадают. Согласно второй аксиоме пучка отсюда следует, что все сечения a_{U_x} являются ограничениями одного сечения $a \in \mathcal{A}(X)$ и $\tilde h(a) = b$.

Докажем точность в члене $\mathcal{C}(X)$. Пусть $c \in \mathcal{C}(X)$. Тогда для каждого $x \in X$ существует окрестность $x \in U$ и сечение $b \in \mathcal{B}(U)$ такие, что $h(b) = c|_U$. Покроем пространство X парами (U_j, b_j) такого типа. Рассмотрим консервативное покрытие $\{S_i\}$, вписанное в покрытие $\{U_j\}$. Оно порождает множество пар (S_i, s_i), где $s_i \in \mathcal{B}(S_i)$ и $h(s_i) = c|_{S_i}$. Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{S}$ всех пар (S, s), где S — объединение множеств из $\{S_i\}$ и $h(s) = c|_S$. Введем на $\mathfrak{S}$ частичный порядок, считая, что $(S, s) \preceq (S', s')$, если $S \subset S'$ и $s'|_S = s$. Любая упорядоченная цепочка таких пар имеет верхнюю границу — объединение всех элементов цепочки. Следовательно, согласно лемме Цорна, существует максимальная пара $(\bar{S}, \bar{s}) \in \mathfrak{S}$. Осталось доказать, что $\bar{S} = X$.

Пусть это не так. Тогда существует пара $(S_0, s_0) \in \mathfrak{S}$ такая, что $S_0 \not\subseteq \bar{S}$, $S_0 \cap \bar{S} \neq \emptyset$ и $h(\bar{s} - s_0) = 0$ на $S_0 \bigcap \bar{S}$. Ограничим пучки на пространство $S_0 \bigcap \bar{S}$. Из уже доказанной точности в члене $\mathcal{B}(S_0 \bigcap \bar{S})$ следует, что существует сечение $a \in \mathcal{A}(S_0 \bigcap \bar{S})$ такое, что $g(a) = \bar{s} - s_0$. Используя мягкость пучка $\mathcal{A}$, продолжим сечение a до $a_0 \in \mathcal{A}(S_0)$. Рассмотрим сечение $\tilde{s} \in \mathcal{B}(S_0 \bigcup \bar{S})$, такое, что $\tilde{s}|_{\bar{S}} = \bar{s}$ и $\tilde{s}|_{S_0} = s_0 + g(a_0)$. Тогда $(S_0 \bigcup \bar{S}, \tilde{s}) \in \mathfrak{S}$, что противоречит максимальности $(\bar{S}, \bar{s})$. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — мягкие пучки и $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \to 0$ — точная последовательность пучков. Тогда пучок $\mathcal{C}$ — мягкий.*

Доказательство. Пусть $S \subset X$ — произвольное замкнутое множество и $c \in \mathcal{C}(S)$. Тогда, согласно теореме 4.1, существует сечение $b \in \mathcal{B}(S)$ такое, что $h(b) = c$. Используя мягкость пучка $\mathcal{B}$, продолжим сечение b до сечения $\tilde{b} \in \mathcal{B}(X)$ и положим $\tilde{c} = h(\tilde{b})$. Тогда $\tilde{c}|_S = c$. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ — точная последовательность, состоящая из мягких пучков на X. Тогда последовательность групп $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots$ тоже точна.*

Доказательство. Положим $K^0 = \mathcal{F}^0$ и $K^n = \mathrm{Im}(\alpha_{n-1}) = \mathrm{Ker}(\alpha_n)$ при $n > 0$. Рассмотрим точные последовательности пучков $0 \to K^n \to \mathcal{F}^n \to K^{n+1} \to 0$. Используя индукцию и теорему 4.2, находим, что пучки K^n мягкие. Следовательно, согласно теореме 4.1, последовательность групп $0 \to K^n(X) \to \mathcal{F}^n(X) \to K^{n+1}(X) \to 0$ точна. Последовательность групп $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots$ является склейкой последовательностей $0 \to K^n(X) \to \mathcal{F}^n(X) \to K^{n+1}(X) \to 0$. $\square$

Следствие 4.1. *Если $\mathcal{F}$ — мягкий пучок, то $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ при $n > 0$.*

Доказательство. Каноническая резольвента пучка $\mathcal{F}$ состоит из мягких пучков. $\square$

4.2. **Длинная точная последовательность.**

Теорема 4.4. *Точная последовательность пучков $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C} \to 0$ порождает точную последовательность групп когомологий $0 \to H^0(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{h_0} H^0(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{l_0} H^0(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_0} H^1(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{h_1} H^1(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{l_1} H^1(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_1} H^2(X, \mathcal{A}) \ldots$, называемую длинной точной последовательностью.*

Доказательство. Согласно теореме 3.1, канонические резольвенты пучков порождают коммутативную диаграмму групп

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha} & \mathcal{A}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_0} & \mathcal{A}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_1} & \ldots\mathcal{A}^n(X) & \xrightarrow{\tilde\alpha_n} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h_0} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h_1} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde h_n} \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{B}(X) & \xrightarrow{\tilde\beta} & \mathcal{B}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_0} & \mathcal{B}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_1} & \ldots\mathcal{B}^n(X) & \xrightarrow{\tilde\beta_n} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\tilde l} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde l_0} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde l_1} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde l_n} \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma} & \mathcal{C}^0(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma_0} & \mathcal{C}^1(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma_1} & \ldots\mathcal{C}^n(X) & \xrightarrow{\tilde\gamma_n} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

и отображения h_n, l_n. Построим отображение δ_n.

Ввиду теоремы 4.1 все столбцы, начиная со второго, точны. Рассмотрим $c \in \mathrm{Ker}(\tilde\gamma_n)$. Ввиду точности столбца существует элемент $b \in B^n(X)$ такой, что $\tilde l_n(b) = c$. Положим $b' = \tilde\beta_n b$. Тогда $\tilde l_{n+1}b' = \tilde l_{n+1}(\tilde\beta_n b) = \tilde\gamma_n(\tilde l_n b) = \tilde\gamma_n(c) = 0$. Ввиду точности столбца существует элемент $a \in A^{n+1}(X)$ такой, что $\tilde h_{n+1}(a) = b'$. Более того, $\tilde h_{n+2}(\tilde\alpha_{n+1}a) = \tilde\beta_{n+1}(\tilde h_{n+1}a) = \tilde\beta_{n+1}b' = \tilde\beta_{n+1}\tilde\beta_n b = 0$. Ввиду точности столбца отсюда следует, что $\tilde\alpha_{n+1}a = 0$, то есть $a \in \mathrm{Ker}(\tilde\alpha_{n+1})$.

Пусть теперь $\bar b \in B^n(X)$ другой элемент со свойством $\tilde l_n(\bar b) = c$. Тогда $\tilde l_n(b - \bar b) = 0$ и ввиду точности столбца, $(b - \bar b) = \tilde h(\tilde a)$, где $\tilde a \in A^n(X)$. Поэтому, в виду коммутативности, применяя предыдущую конструкцию к элементу $\bar b$ мы получим элемент $a + \tilde\alpha_n(\tilde a)$. Таким образом, элемент a определен с точностью до $\mathrm{Im}(\tilde\alpha_n)$. Следовательно, соответствие $c \mapsto a$ порождает отображение $\tilde\delta_n : \mathrm{Ker}(\tilde\gamma_n) \to H^{n+1}(X, \mathcal{A})$.

Пусть теперь $c \in \mathrm{Im}(\tilde\gamma_{n-1})$, то есть $c = \tilde\gamma_{n-1}c''$ для некоторого $c'' \in C^{n-1}(X)$. Ввиду точности столбца, существует элемент $b'' \in B^{n-1}(X)$ такой, что $\tilde l_{n-1}(b'') = c''$. Положим $b = \tilde\beta_{n-1}b''$. Ввиду коммутативности диаграммы $\tilde l_n b = c$. Используя этот b в описанной выше конструкции, находим, что $\tilde\delta_n c = 0$ и, следовательно, $\tilde\delta_n$ порождает гомоморфизм $\delta_n : H^n(X, \mathcal{C}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{A})$.

Докажем точность последовательности когомологий. Начнем с точности в члене $H^n(X, \mathcal{B})$. Равенство $l_n h_n = 0$ следует из точности столбца пучков. Пусть $l_n(\bar b) = 0$. Тогда существует $b \in \bar b$ такой, что $\tilde l_n(b) = 0$. Тогда, в виду точности столбца n, $b = \tilde h_n(a)$ для некоторого $a \in \mathcal{A}(X)$, причем $a \in \mathrm{Ker}(\tilde\alpha_n)$ в виду точности столбца $n{+}1$. Таким образом a порождает гомологический класс, переходящий в $\bar b$ под действием h_n.

Докажем точность в члене $H^n(X,)$. Действительно, для $b \in \mathrm{Ker}(\tilde\beta_n)$ выполнено $\delta_n l_n(b + \mathrm{Im}(\tilde\beta_{n-1})) = (\tilde h_{n+1})^{-1}\tilde\beta_n(b) = 0$. Если $\delta_n(c + \mathrm{Im}(\tilde\gamma_{n-1})) = 0$ и $c \in \mathrm{Ker}(\tilde\gamma_n)$, то, в виду точности столбцов n и $n{+}1$, $c = \tilde l_n(b)$, где $\tilde\beta_n(b) = 0$. Таким образом b порождает гомологический класс, переходящий в $c + \mathrm{Im}(\tilde\gamma_{n-1})$ под действием l_n.

Докажем точность в члене $H^n(X, \mathcal{A})$. Действительно $\tilde h_n\tilde\delta_{n-1}(c + \mathrm{Im}(\tilde\gamma_{n-1})) = \tilde\beta_n(\tilde l_n)^{-1}(c) \in \mathrm{Im}(\tilde\beta_n)$, и, следовательно лежит в нулевом классе гомологий. Пусть $a \in \mathrm{Ker}(\tilde h_{n+1})$. Тогда $\tilde h_{n+1}a \in \mathrm{Im}(\beta_n)$, то есть $\tilde h_{n+1}a = \beta_n b$

для некоторого $b \in B^n(X)$. По определению это означает, что $a = \delta_n c$, где $c = \tilde{l}_n(b)$. $\square$

Участвующие в длинной точной последовательности операторы δ_i называются *связывающими* или *оператором Бокштейна.*

Упражнение 4.2. *Доказать, что морфизм (т.е. коммутативная диаграмма) точных последовательностей пучков*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{B}' & \longrightarrow & \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

порождает морфизм (т.е. коммутативную диаграмму) длинных точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{B}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{C}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{B})... \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{A}') & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{B}') & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{C}') & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{A}') & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{B}')... \end{array}$$

5. Аксиоматическая теория когомологий.

5.1. **Ацикличные резольвенты.** Свяжем с произвольной резольвентой пучка $\mathcal{F}$

$$D_{\mathcal{F}} = \{0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\delta} \mathcal{D}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{D}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\delta_2} ...\}$$

последовательность сечений

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}} \mathcal{D}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_0} \mathcal{D}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_1} \mathcal{D}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_2} ...$$

и семейство групп $H^0(X, D_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}(X)$, $H^n(X, D_{\mathcal{F}}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1})$ $(n > 0)$. Для канонической резольвенты эта конструкция дает группы когомологий с коэффициентами в $\mathcal{F}$. Докажем, что наша конструкция дает группы когомологий и для любой ацикличной резольвенты. Резольвента $D_{\mathcal{F}}$ пучка $\mathcal{F}$ называется *ацикличной*, если $H^n(X, D^m) = 0$ для всех $n > 0, m \geq 0$.

Теорема 5.1. *Для произвольной резольвенты*

$$D_{\mathcal{F}} = \{0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\delta} \mathcal{D}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{D}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\delta_2} ...\}$$

существуют естественные гомоморфизмы

$$\gamma^n : H^n(X, D_{\mathcal{F}}) \to H^n(X, \mathcal{F}).$$

Эти гомоморфизмы являются изоморфизмами, если $D_{\mathcal{F}}$ — ацикличная резольвента.

Доказательство. Положим $K^0 = \mathcal{F}$ и $K^n = \mathrm{Ker}(\delta_n)$ при $n > 0$. Тогда последовательность

$$0 \to K^{n-1} \to \mathcal{D}^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} K^n \to 0$$

точна. Рассмотрим ее длинную точную последовательность

$$0 \to H^0(X, K^{n-1}) \to H^0(X, \mathcal{D}^{n-1}) \xrightarrow{\delta^0_{n-1}} H^0(X, K^n) \xrightarrow{\hat{\gamma}^n_1} H^1(X, K^{n-1}) \to H^1(X, \mathcal{D}^{n-1})...$$

Согласно нашим определениям,

$$H^n(X,D_{\mathcal{F}})=\mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1})=K^n(X)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1})=H^0(X,K^n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1}).$$

Таким образом, гомоморфизм $\hat{\gamma}_1^n$ порождает мономорфизм

$$\gamma_1^n: H^n(X,D_{\mathcal{F}})\to H^1(X,K^{n-1}),$$

являющийся изоморфизмом при $H^1(X,\mathcal{D}^{n-1})=0$.

Рассмотрим теперь точную последовательности пучков

$$0\to K^{n-r}\to \mathcal{D}^{n-r}\overset{\delta_{n-r}}{\to} K^{n-r+1}\to 0$$

для $r>1$. Ее длинная точна последовательность имеет участок

$$...\to H^{r-1}(X,\mathcal{D}^{n-r})\overset{\delta_{n-r}^{r-1}}{\to} H^{r-1}(X,K^{n-r+1})\overset{\gamma_r^n}{\to} H^r(X,K^{n-r})\to H^r(X,\mathcal{D}^{n-r})...$$

Этот участок порождает гомоморфизм

$$\gamma_r^n: H^{r-1}(X,K^{n-r+1})\to H^r(X,K^{n-r}),$$

являющийся изоморфизмом при $H^{r-1}(X,\mathcal{D}^{n-r})=H^r(X,\mathcal{D}^{n-r})=0$.

Произведение $\gamma^n=\gamma_n^n\gamma_{n-1}^n\gamma_{n-2}^n...\gamma_1^n$ порождает гомоморфизм

$$\gamma^n: H^n(X,D_{\mathcal{F}})\to H^1(X,K^{n-1})\to H^2(X,K^{n-2})...\to H^n(X,K^0)=H^n(X,\mathcal{F}),$$

являющийся изоморфизмом, если $H^n(X,D^m)=0$ для всех $n>0, m\geq 0$. $\square$

Ниже мы увидим, что многие важные пучки имеют естественные ацикличные резольвенты. В этих случаях теорема 5.1 дает эффективную возможность вычислять когомологии с коэффициентами в пучках.

Упражнение 5.1. *Морфизм резольвент*

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}: & 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}^0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^1 & \longrightarrow & ... \\
 & & & \downarrow f & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \\
\mathfrak{B}_{\mathcal{B}}: & 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B}^0 & \longrightarrow & \mathcal{B}^1 & \longrightarrow & ...
\end{array}$$

порождает гомоморфизмы групп $\tilde{f}_n: H^n(X,\mathfrak{A}_{\mathcal{A}})\to H^n(X,\mathfrak{B}_{\mathcal{B}})$. Эти гомоморфизмы являются изоморфизмами, если f — изоморфизм пучков и обе резольвенты ацикличны.

5.2. **Аксиоматический подход.** Доказательство теоремы 5.1 использует лишь доказанные нами общие свойства групп когомологий и не использует конструкцию канонической резольвенты, с помощью которой мы их определяли. Это позволяет описать когомологии как аксиоматическую теорию.

Теорема 5.2. *Аксиоматический подход к теории когомологий (обязательное письменное домашнее задание)*

Пусть $\mathcal{F}\mapsto \tilde{H}^*(X,\mathcal{F})$ — произвольное соответствие, сопоставляющее пучку абелевых групп $\mathcal{F}$ над топологическим пространством X семейство абелевых групп $\tilde{H}^*(X,\mathcal{F})=\{\tilde{H}^n(X,\mathcal{F})|n\geq 0\}$. Тогда функториальные относительно морфизмов пучков изоморфизмы между группами $\tilde{H}^n(X,\mathcal{F})$ и $H^n(X,\mathcal{F})$ существуют если и только если выполняются следующие 4 аксиомы.

I.Нормировка (сравните со следствием 4.1):

1)$\tilde{H}^0(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$*;*

2) $\tilde{H}^n(X,\mathcal{F}) = 0$*, если* $n > 0$ *и* $\mathcal{F}$ *— пучок произвольных сечений какого-то накрытия.*

II. Функториальность соответствия (сравните с теоремой 3.1):

Морфизм $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B}$ *пучков над* X *порождает гомоморфизмы групп* $h_n : \tilde{H}^n(X,\mathcal{A}) \to \tilde{H}^n(X,\mathcal{B})$ *такие, что:*

1) $h_0 = h_X : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X)$ *— гомоморфизм глобальных сечений;*

2) если h *— тождественный морфизм, то* h_n *— тождественный гомоморфизм для любого* n*;*

3) если $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C}$ *— последовательность морфизмов пучков, то* $(lh)_n = l_n h_n$*.*

III. Длинная точная последовательность (сравните с теоремой 4.4):

Точная последовательность пучков $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C} \to 0$ *порождает точную последовательность групп*

$$0 \to \tilde{H}^0(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{h_0} \tilde{H}^0(X,\mathcal{B}) \xrightarrow{l_0} \tilde{H}^0(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_0} \tilde{H}^1(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{h_1} \tilde{H}^1(X,\mathcal{B}) \xrightarrow{l_1} \tilde{H}^1(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_1} \tilde{H}^2(X,\mathcal{A}) \ldots$$

, называемую длинной точной последовательностью.

IV. Функториальность длинной точной последовательности (сравните с упражнением 4.2):

Морфизм точных последовательностей пучков

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{B}' & \longrightarrow & \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

порождает морфизм длинных точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \tilde{H}^0(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & \tilde{H}^0(X,\mathcal{B}) & \longrightarrow & \tilde{H}^0(X,\mathcal{C}) & \longrightarrow & \tilde{H}^1(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & \tilde{H}^1(X,\mathcal{B})\ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \tilde{H}^0(X,\mathcal{A}') & \longrightarrow & \tilde{H}^0(X,\mathcal{B}') & \longrightarrow & \tilde{H}^0(X,\mathcal{C}') & \longrightarrow & \tilde{H}^1(X,\mathcal{A}') & \longrightarrow & \tilde{H}^1(X,\mathcal{B}')\ldots
\end{array}.$$

Простота аксиоматики наводит на мысль о существовании других конструкций, приводящих к когомологиям. Важные примеры таких конструкций: когомологии Чеха и когомологии де Рама (для постоянных пучков на гладких многообразиях) приводятся ниже.

6. Когомологии Чеха.

6.1. **Когомологии покрытия.** Как мы уже доказали, когомологии со значениями в пучке — это единственный функтор из категории пучков в категорию абелевых групп, удовлетворяющий простой системе аксиом. Такой функтор можно строить разными способами, не обязательно с помощью резольвент. В этом параграфе мы опишем не связанную с резольвентой конструкцию когомологий со значениями в произвольном пучке. Эта конструкция оказывается удобной для многих приложений теории.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — покрытие топологического пространства X открытыми множествами. Любой упорядоченный набор с непустым пересечением из $q+1$ элементов этого покрытия $\sigma = (U_0, U_1, ..., U_q)$ назовем *q-симплексом* покрытия $\mathcal{U}$. Пересечение $|\sigma| = \bigcap_{i=0}^{q} U_i$ назовем *носителем* симплекса σ. q-симплекс σ порождает $(q-1)$-симплексы $\sigma_i = (U_0, U_1, ...U_{i-1}, U_{i+1}, ..., U_q)$.

Рассмотрим пучок абелевых групп $\mathcal{G}$ над топологическим пространством X. Отображение, сопоставляющее каждому q-симплексу σ сечение $f(\sigma) \in \mathcal{G}(|\sigma|)$ над его носителем, называем *q-цепью покрытия $\mathcal{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{G}$*. Множество всех q-цепей $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ образует абелеву группу. Используя отображения ограничения $r_V^U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$, определим *кограничный оператор* $\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G})$, считая, что $(\delta f)(\sigma) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i r_{|\sigma|}^{|\sigma_i|} f(\sigma_i)$ для любого $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

Упражнение 6.1. *Доказать, что $\delta^2 = 0$.*

Положим $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \mathrm{Ker}(\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}))$, $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = 0$ и $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \mathrm{Im}(\delta : C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}))$ для $q > 0$. Фактор-группа $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})/B^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ называется *q-тыми когомологиями Чеха для покрытия $\mathcal{U}$.*

Обозначим через $\acute{\mathbb{R}}$ пучок колец, сечениями которого над U являются произвольные отображения в вещественные числа. Рассмотрим его подпучок $\acute{\mathbb{Z}}$, сечения которого — произвольные отображения в целые числа. Сопоставим теперь пучку абелевых групп $\mathcal{G}$ пучок $\acute{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \otimes_{\acute{\mathbb{Z}}} \acute{\mathbb{R}}$ модулей над $\acute{\mathbb{R}}$.

Напомним, что покрытие открытыми множествами $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ топологического пространства X называется локально конечным, если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность, пресекающая лишь конечное число элементов покрытия. В этом случае существует *согласованное с $\mathcal{U}$ разбиение единицы*. То есть набор непрерывных функций $\{\eta_U : U \to X | U \in \mathcal{U}\}$ такой, что $\sum\limits_{U \in \mathcal{U}} \eta_U = 1$ и замыкание носителя η_U лежит в U.

Лемма 6.1. *Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — покрытие топологического пространства X. Тогда a) $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$; b) если $\mathcal{U}$ локально конечно и $\mathcal{G}$ — пучок произвольных сечений накрытия, то $\check{H}^q(\mathcal{U}, \acute{\mathcal{G}}) = 0$ при $q > 0$.*

Доказательство. Согласно аксиоме 2) пучка, из условия $f \in Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ следует существование сечения $s \in \mathcal{G}(X)$ такого, что $s|_U = f(U)$ для любого $U \in \mathcal{U}$.

Пусть теперь $\mathcal{G}$ — пучок произвольных сечений некоторого накрытия, покрытие $\mathcal{U}$ локально конечно и $\{\eta_U | U \in \mathcal{U}\}$ — разбиение единицы согласованное с $\mathcal{U}$. Рассмотрим произвольную q-цепь $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. Тогда $\eta_U f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

Обозначим через g_U $q-1$-цепь, сечение которой $g_U(\sigma^{q-1})$ на носителе $q-1$-симплекса σ^{q-1} определяется следующим правилом: $g_U(\sigma^{q-1}) = 0$, если $U \cap |\sigma^{q-1}| = \emptyset$ и $g_U(\sigma^{q-1}) = (-1)^q \eta_U f$ если $U \cap |\sigma^{q-1}| \neq \emptyset$. Положим $g = \sum\limits_{U \in \mathcal{U}} g_U \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. Тогда, в виду $\eta_U f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$, имеем $\delta g_U(\sigma^q) = \eta_U f(\sigma^q)$ и $\delta g(\sigma^q) = f(\sigma^q)$ для любого q-симплекса σ^q. □

6.2. **Теорема Лере.**

Теорема 6.1. *(Лере) Пусть $\mathcal{G}$ — пучок абелевых групп над X и покрытие $\mathcal{U}$ пространства X таково, что $H^q(|\sigma|, \mathcal{G}) = 0$ при $q > 0$ для любого симплекса σ этого покрытия. Тогда $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = H^q(X, \mathcal{G})$.*

Доказательство. Каноническая резольвента $0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\gamma} \ldots$ порождает резольвенту $0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\gamma} \ldots$, где $\mathcal{G}^i = \acute{\mathcal{F}}^i$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G}(X) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \mathcal{G}^0(X) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \mathcal{G}^1(X) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \ldots \mathcal{G}^n(X) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\
0 & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \ldots C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}^n) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\
0 & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \ldots C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}^n) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\
0 & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \ldots C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}^n) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta}
\end{array}$$

Резольвента $\mathcal{G}$ ациклична и, следовательно, $H^q(|\sigma|, \mathcal{G}) = 0$. Поэтому последовательность $0 \to \mathcal{G}(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \mathcal{G}^0(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \mathcal{G}^1(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \mathcal{G}^2(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \ldots$ точна для любого симплекса σ покрытия $\mathcal{U}$. Отсюда следует точность всех строк диаграммы кроме, быть может, первой. Из леммы 6.1 следует следует точность всех столбцов диаграммы кроме, быть может, первого.

Сопоставим теперь элементу $f^q \in \mathrm{Ker}(\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}))$ некоторый элемент из $\mathrm{Ker}(\tilde{\gamma} : \mathcal{G}^q(X) \to \mathcal{G}^{q+1}(X))$. Для этого рассмотрим $\tilde{f}^q = \tilde{\gamma} f^q$. Тогда $\delta \tilde{f}^q = \tilde{\gamma} \delta f^q = 0$. Используя точность столбца, находим элемент $f^{q-1} \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}^0)$ такой, что $\delta f^{q-1} = \tilde{f}^q$. Положим $\tilde{f}^{q-1} = \tilde{\gamma} f^{q-1}$. Тогда $\delta \tilde{f}^{q-1} = \tilde{\gamma}^2 f^q = 0$. Используя точность столбца, находим элемент $f^{q-2} \in C^{q-2}(\mathcal{U}, \mathcal{G}^1)$ такой, что $\delta f^{q-2} = \tilde{f}^{q-1}$. Продолжая процесс, находим элемент $f \in \mathcal{G}^q(X)$ такой, что $\delta \tilde{\gamma} f = 0$. Ввиду мономорфности δ отсюда следует, что $\tilde{\gamma} f = 0$. Нетрудно проследить, что произвол в выборе элементов f^i не меняет когомологический класс $f + \mathrm{Im}(\tilde{\gamma} : \mathcal{G}^{q-1}(X) \to \mathcal{G}^q(X))$ элемента f. Более того, наша конструкция переводит группу $\mathrm{Im}(\delta : C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}))$ в группу $\mathrm{Im}(\tilde{\gamma} : \mathcal{G}^{q-1}(X) \to \mathcal{G}^q(X))$. Таким образом, мы построили гомоморфизм $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to H^q(X, \mathcal{G})$. Эпиморфность отображения доказывается полностью аналогичной "инверсной"конструкцией, позволяющей сопоставить элементу из $\mathcal{G}^q(X)$ элемент из $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$. Группе $\mathrm{Im}(\tilde{\gamma} : \mathcal{G}^{q-1}(X) \to \mathcal{G}^q(X))$ отвечает при этом группа $\mathrm{Im}(\delta : C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}))$ и, следовательно, эпиморфизм является мономорфизмом. □

Покрытия $\mathcal{U}$ со свойством $H^q(|\sigma|, \mathcal{G}) = 0$ для любого симплекса σ называются *покрытиями Лере для пучка* $\mathcal{G}$. Такие покрытия имеют большинство важных для приложения пучков. В этом случае теорема Лере дает эффективный метод вычисления когомологий.

Покрытие $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ назовем *измельчением* покрытия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, если для любого $V_\alpha \in \mathcal{V}$ существует $U_\beta \in \mathcal{U}$, содержащее V_α. Рассмотрим соответствие F, сопоставляющее каждому симплексу $\varsigma = (V_0, V_1, ..., V_q)$ симплекс $\sigma(\varsigma) = (U_0, U_1, ..., U_q)$, где $V_i \subset U_i$ для всех i. Сопоставим коцепи $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ ее измельчение, то есть коцепь $\tilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(f) \in C^q(\mathcal{V}, \mathcal{G})$ такую, что $\tilde{\varphi}^q_{\mathcal{F}}(f)(\varsigma) = r^{|\sigma(\varsigma)|}_{|\varsigma|} f(\sigma(\varsigma))$.

Упражнение 6.2. *Доказать, что отображение $\tilde{\varphi}_{\mathcal{F}}$ порождает гомоморфизм $\varphi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{G})$, не зависящий от соответствия F.*

Рассмотрим теперь объединение всех групп $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$, отвечающих всем открытым покрытиям $\mathcal{U}$ множества X. Введем между элементами этих групп отношение эквивалентности, считая, что $u \in \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ эквивалентен $v \in \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{G})$, если $\varphi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}(u) = \varphi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(v)$ для некоторого измельчения $\mathcal{W}$ покрытий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. (Конструкция такого типа называется *индуктивным пределом* по множеству покрытий). Классы эквивалентности образуют абелеву группу $\check{H}^q(X, \mathcal{G})$, называемую *$q$-той группой когомологий Чеха пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{G}$*.

Упражнение 6.3. *Доказать, что для топологического многообразия X когомологии Чеха $\check{H}^q(X, \mathcal{G})$ изоморфны когомологиям $H^q(X, \mathcal{G})$. Докажите это двумя способами:*

1.Модифицируя приведенное выше доказательство теоремы Лере.

2. Доказав, что функтор $\mathcal{G} \mapsto H^q(X, \mathcal{G})$ удовлетворяют аксиомам аксиома теории когомологий (упражнение 5.2).

Для пучков, допускающих покрытие Лере конструкция из доказательства теоремы Лере дает явное описание изоморфизма когомологий Чеха и когомологий, определенных с помощью резольвент .

7. Когомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$ и теорема де Рама.

7.1. **Пучки модулей.** Кроме пучков групп мы будем рассматривать пучки колец и пучки модулей над пучками колец. Для того чтобы наделить пучок $\mathcal{M}$ структурой пучка модулей над пучком колец $\mathcal{R}$, надо наделить структурой модуля над $\mathcal{R}(U)$ множества сечений $\mathcal{M}(U)$ и потребовать, чтобы эти структуры были согласованы с ограничениями сечений пучков.

Упражнение 7.1. *Дать полное определение пучка модулей над пучком колец.*

Пример 7.1. *1. Пучками колец являются пучки произвольных функций на X со значениями в кольце $\mathbb{K}$ (например, в кольце вещественных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел) и его подпучки: пучек непрерывных функций, пучок локально-постоянных функций (обозначается $\mathbb{R}$) и, если X — гладкое многообразие, пучок $\mathcal{E}^0$ гладких функций.*

2. Пучки гладких тензорных полей на гладком многообразии X (в частности пучки $\mathcal{E}^p$ вещественных дифференциальных форм степени p) являются пучками модулей над $\mathcal{E}^0$.

Сечение $s \in \mathcal{M}(U)$ пучка $\mathcal{M}$ над открытым множеством $U \subset X$ назовем *стабильным* если оно равно 0 в некоторой окрестности ∂U. Пучок $\mathcal{M}$ назовем *стабильным*, если любое стабильное сечение $s \in \mathcal{M}(U)$ продолжается до сечения $\bar{s} \in \mathcal{M}(X)$, ограничение которого на $X\setminus$ равно 0.

Теорема 7.1. *Пучок стабильный модулей над мягким пучком колец $\mathcal{R}$ с единицей является мягким.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$—пучок модулей над $\mathcal{R}$. Рассмотрим произвольное сечение $s \in \mathcal{M}(S)$ над замкнутым множеством $S \subset X$. Оно является ограничением некоторого сечения $\tilde{s} \in \mathcal{M}(U)$ над некоторой окрестностью $U \supset S$. Рассмотрим открытое множество $U \supset V \supset S$ В виду мягкости, пучок $\mathcal{R}$ имеет сечение $r \in \mathcal{R}(X)$, принимающее значение 1 на S и значение 0 на $X \setminus V$. Следовательно $r\tilde{s} \in \mathcal{M}(X)$ — стабильное сечение сечение, совпадающее с s на S и его можно продолжить нулем. □

Следствие 7.1. *Стабильные пучки модулей над кольцами непрерывных и гладких функций мягкие.*

Доказательство. Согласно теореме 7.1, нам достаточно доказать, что пучки непрерывных и гладких функций на гладком многообразии мягкие. Это следует из классической теоремы математического анализа: для непересекающихся замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и компакта $B \subset \mathbb{R}^n$ существует гладкая функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi(A) = 1$ и $\varphi(B) = 0$. □

7.2. **Сингулярные когомологии.** Через $H^n(X, \mathbb{R})$ мы обозначаем когомологии пространства X со значениями в постоянном пучке колец. В топологии похожее обозначение $H^n_{sin}(X, \mathbb{R})$ имеют сингулярные когомологии. Напомним их определение.

Обозначим через Δ^p p-мерный симплекс с упорядоченными вершинами. *Сингулярной цепью степени* p на X называется конечная формальная линейная комбинация с вещественными коэффициентам непрерывных отображений $\sum_i r_i\{(f_i : \Delta^p \to U)\}$. Они образуют векторное пространство $L_p(U)$ над $\mathbb{R}$.

Сингулярной коцепью степени p на X называется вещественный линейный функционал на $L_p(U)$. Стандартная в топологии операция, сопоставляющая симплексу $\Delta^p = \{1, 2, ..., p\}$ линейную комбинацию симплексов $\sum_i (-1)^i \{1, 2, ..., \hat{i}, ...p\}$ (где $\hat{}$ означает пропуск вершины), задает оператор $\delta^{p-1} : L^{p-1}(U) \to L^p(U)$.

Упражнение 7.2. *Доказать, что* $\delta^{p+1}\delta^p = 0$.

Соответствия $U \mapsto L^p(U)$, вместе с естественными отображениями ограничений, порождают предпучок L^p на X. Продолжим оператор δ^p на пучок $\mathcal{L}^p$ порожденный предпучком L^p. Фактор-группа $H^p_{sin}(X, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\delta^p)/\mathrm{Im}(\delta^{p-1})$ называется p-той группой *сингулярных когомологий.* Не трудно доказать, что $H^p_{sin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \delta_{p,0}$.

Теорема 7.2. *Если X — топологическое многообразие, то* $H^p_{sin}(X, \mathbb{R}) = H^p(X, \mathbb{R})$.

Доказательство. Пучок $\mathcal{L}^0$ имеет естественную структуру кольца, изоморфного кольцу $\mathcal{R}$ произвольных вещественных функций на X. Пучки $\mathcal{L}^p$ являются стабильными модулями над кольцом $\mathcal{R}$. Согласно теореме 7.1 отсюда следует все пучки $\mathcal{L}^p$ мягкие. Последовательность пучков $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{L}^2 \xrightarrow{\delta^2} ...$ точна в виду $H^p_{sin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \delta_{p,0}$, то есть образует резольвенту мягких пучков. Согласно следствию 4.1 и теореме 5.1 отсюда следует, что $H^p(X, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\delta^p)/\mathrm{Im}(\delta^{p-1}) = H^p_{sin}(X, \mathbb{R})$. □

7.3. **Когомологии де Рама.** Покажем, что когомологии с коэффициентами в постоянном пучке $\mathbb{R}$ над гладким многообразием X совпадают не только с сингулярными когомологиями но и с когомологиями де Рама. Напомним их определение.

Рассмотрим векторное пространство $E^p = \mathcal{E}^p(X)$ вещественных дифференциальных форм степени p на X. Обозначим через $d^p : E^p \to E^{p+1}$ оператор дифференцирования дифференциальных форм. Тогда $d^{p+1}d^p = 0$. Фактор-группа $H^p_{Dr}(X, R) = \mathrm{Ker}(d^p)/\mathrm{Im}(d^{n-1})$ называется *p-той группой когомологиями де Рама.*

Теорема 7.3. $H^p_{Dr}(X, \mathbb{R}) = H^p(X, \mathbb{R})$.

Доказательство. Операторы дифференцирования порождают последовательность пучков дифференциальных форм $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d^2}$ .... Согласно лемме Пуанкаре, условие $d(f) = 0$ локально эквивалентно условию $f = d(g)$. Таким образом, эта последовательность пучков точна и является резольвентой. Она мягкая согласно следствию 7.1. Согласно следствию 4.1 и теореме 5.1 отсюда следует, что $H^p(X, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(d^p)/\mathrm{Im}(d^{n-1}) = H^p_{Dr}(X, \mathbb{R})$. □

Таким образом, мы доказали

Теорема 7.4. *(де Рам) Когомологии де Рама изоморфны сингулярным когомологиям.*

Упражнение 7.3. *Используя упражнение 5.1, доказать, что изоморфизм, о котором идет речь в теореме, порождается интегрированием дифференциальных форм по сингулярным цепям.*

8. Векторные расслоения.

8.1. **Определения и примеры.** Гладкое отображение гладких многообразий $\pi : E \to X$ называется *вещественным локально тривиальным векторным расслоением ранга r*, если

1) *слой* $E_p = \pi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in X$ наделен структурой вещественного векторного пространства размерности r;

2) у каждой точки $p \in X$ существует окрестность $U \subset X$ и гладкое отображение $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, называемое *локальной тривиализацией*, такие, что отображение $h|_{E_x} : E_x \to x \times \mathbb{R}^r$ является изоморфизмом векторных пространств для любого $x \in U$.

Многообразия E и X называются соответственно *пространством* и *базой* расслоения. Далее мы будем для краткость опускать слова "вещественное локально тривиальное".

Пара тривиализаций $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $h_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^r$ порождает отображение $h_\alpha h_\beta^{-1} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \to (U_\alpha \bigcap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$, эквивалентное гладкому отображению $g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R})$, называемому *функцией перехода.*

Лемма 8.1. *Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \Upsilon\}$ — покрытие топологического пространства X открытыми множествами. Тогда семейство гладких отображений $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R}) | \alpha, \beta \in \Upsilon\}$ является семейством функцией перехода некоторого векторного расслоения $\pi : E \to X$, если и только если $g_{\alpha\alpha} = 1$ и $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon$.*

Доказательство. Равенство $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ для семейства функций перехода векторного расслоения очевидно. Докажем обратное утверждение. Рассмотрим семейство гладких отображений $\mathcal{G}$ такое, что $g_{\alpha\alpha} = 1$ и $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon$. Рассмотрим $\tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in \Upsilon} E_\alpha$, где $E_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. Точки $(p, v) \in E_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $(p, w) \in E_\beta = U_\beta \times \mathbb{R}^r$ будем считать эквивалентными, если $v = g_{\alpha\beta}w$. Факторизация множества $\tilde{E}$ по этой эквивалентности порождает нужное нам расслоение с локальными тривиализациями $h_\alpha(p, v) = (p, v)$. □

Таким образом, мы можем задавать векторные расслоения над X, указывая покрытие многообразия X и семейство функций перехода, удовлетворяющее лемме 8.1.

Пример 8.1. *1) Тривиальное расслоение $\pi : X \times \mathbb{R}^r \to X$.*

2) Универсальное (тавтологическое) расслоение над проективным пространством. Вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ — это множество всех одномерных подпространств векторного пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x^0, ..., x^n)\}$. Универсальным (или тавтологическим) расслоением называется отображение $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}P^n$, сопоставляющее вектору $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ порожденное им подпространство $[v] = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Множество $\mathbb{R}P^n$ покрывается множествами $U_i = \{[(x^0, ..., x^n)] | x^i \neq 0\}$. Эти множества, вместе с функциями $f_i([(x^0, ..., x^n)]) = (\frac{x^0}{x^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, ..., \frac{x^n}{x^i}) \in \mathbb{R}^n$ образуют гладкий атлас (U_i, f_i), на $\mathbb{R}P^n$. Соответствие $(x^0, ..., x^n) \mapsto ([v], x^i)$ порождает порождает локальную тривиализацию $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}$. Функции перехода между тривиализациями h_i и h_j равны $g_{ij} = \frac{x^i}{x^j}$.

3) Касательное расслоение $\pi : TX \to X$ над произвольным гладким многообразием X. Рассмотрим атлас локальных карт $\{(f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^r) | \alpha \in \Upsilon\}$ многообразия X. Гомеоморфизм f_α позволяет задать вектора $\{\frac{\partial}{\partial x^i} | i = 1, \ldots, r\}$ в каждой точке $x \in U_\alpha$. Порожденные ими векторные пространства образуют множество $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. Их объединение, вместе с отождествлением касательных векторов, образует локальную тривиализацию расслоения, называемого касательным.

Упражнение 8.1. *Докажите, что функция перехода между тривилизациями f_α и f_β совпадает с матрицей Якоби отображения $f_\beta f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \to f_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta)$.*

Морфизмом векторного расслоения $\pi : E \to X$ в векторное расслоение $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$ называется пара гладких отображений $\varphi_X : X \to \tilde{X}$ и $\varphi_E : E \to \tilde{E}$ таких, что $\tilde{\pi}\varphi_E = \varphi_X \pi$ и ограничение $\varphi_E|_p$ отображения φ_E на каждый слой $E|_p = \pi^{-1}(p)$ является гомоморфизмом. Как обычно, обратимый в классе морфизмов морфизм расслоений называется *изоморфизмом расслоений.* При $X = \tilde{X}$ и тождественном отображении φ_X изоморфизм называется *эквивалентностью расслоений*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_E} & \tilde{E} \\ \Big\downarrow \pi & & \Big\downarrow \tilde{\pi} \\ X & \xrightarrow{\varphi_X} & \tilde{X} \end{array}$$

Упражнение 8.2. *Доказать, что семейства переходных функций $\{g_{\alpha,\beta}\}$ и $\{\tilde{g}_{\alpha,\beta}\}$ задают эквивалентные расслоения, если и только если существует семейство гладких отображений $l_\alpha : U_\alpha \to GL(r, \mathbb{R})$ такое, что $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = l_\alpha g_{\alpha,\beta} l_\beta^{-1}$. Доказать, что касательное расслоение, зависящее в нашем определении от атласа локальных карт, переходит в эквивалентное при замене атласа.*

Лемма 8.2. *Для любого векторного расслоения $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$ и любого гладкого отображения $\varphi_X : X \to \tilde{X}$ существует векторное расслоение $\pi : E \to X$ и отображения $\varphi_E : E \to \tilde{E}$ такие, что (φ_X, φ_E) — морфизм расслоений.*

Доказательство. Определим расслоение $\pi : E \to X$ и отображение $\varphi_E : E \to \tilde{E}$, считая, что $\pi^{-1}(p) = \tilde{\pi}^{-1}(\varphi_X(p))$. Определим гладкую структуру на E, считая, что φ_E — гладкое отображение. □

Векторное расслоение $\pi : E \to X$, удовлетворяющее требованиям леммы 8.2, называется *обратным образом расслоения* $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$.

Упражнение 8.3. *Доказать, что обратный образ расслоения определен однозначно, с точностью до эквивалентности.*

На векторные расслоения над X распространяются все операции между векторными пространствами. Прямая сумма $\pi_1 \oplus \pi_2 : E_1 \bigoplus E_2 \to X$ расслоений $\pi_1 : E_1 \to X$ и $\pi_2 : E_2 \to X$ определяется, например, условием $(\pi_1 \oplus \pi_2)^{-1}(p) = \pi_1^{-1}(p) \oplus \pi_2^{-1}(p)$. Расслоение $\pi^* : E^* \to X$ называется *сопряженным* к расслоению $\pi : E \to X$, если слои E_p и E_p^* сопряжены, то есть $E^* = Hom(E, \mathbb{R}_X)$, где $\mathbb{R}_X$ — тривиальное расслоение ранга 1. Расслоение, сопряженное к касательному расслоению, называется *кокасательным.*

Упражнение 8.4. *Дать точные определения и найти переходные функции расслоений $E_1 \bigoplus E_2 \to X$, $E_1 \otimes E_2 \to X$, $Hom(E_1, E_2) \to X$, $S^n E \to X$ (симметричная тензорная степень), $\Lambda^n E \to X$ (антисимметричная тензорная степень), $E^* \to X$ и для кокасательного расслоения.*

Сечением векторного расслоения $\pi : E \to X$ называется гладкое отображение $s : X \to E$ такое что πs — тождественное отображение. Множество сечений над $U \subset X$ будет обозначаться $E(U)$. Нетрудно видеть, что соответствие $U \mapsto E(U)$ и очевидные функции ограничения порождают пучок $\mathcal{E}_E$, называемый *пучком сечений векторного расслоения* $\pi : E \to X$. Пучки, получающиеся таким способом из векторных расслоений, и изоморфные им пучки называются *локально свободными.*

Локально свободные пучки являются пучками модулей над мягким пучком гладких функций. Следовательно, согласно следствию 7.1 все они мягкие.

Пример 8.2. *Пучок сечений антисимметричной тензорной степени $\Lambda^p T^* X$ кокасательного расслоения $\pi : T^* X \to X$ изоморфен пучку $\mathcal{E}^p$ дифференциальных p-форм.*

Упражнение 8.5. *Как связаны морфизмы локально свободных пучков и морфизмы отвечающих им векторных расслоений?*

Упражнение 8.6. *Дать определение голоморфного комплексного векторного расслоения над комплексным многообразием. Какие из приведенных выше утверждений относительно вещественных расслоений остаются верными для комплексных расслоений.*

8.2. **Универсальные расслоения.** *Грассмановым многообразием $\mathbb{K}G_{r,n}$ над полем* $\mathbb{K}$ называется множество всех r-мерных подпространств векторного пространства $\mathbb{K}^n$. Мы будем рассматривать лишь вещественные ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) и комплексные ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) грассмановы многообразия.

Универсальным расслоением называется расслоение $\pi_{r,n} : F \to \mathbb{K}G_{r,n}$ ранга r, слой которого F_p над точкой $p \in \mathbb{K}G_{r,n}$ совпадает с подпространством в $\mathbb{K}^n$, представляющим p.

Структура гладкого (соответственно, комплексного) многообразия определяется на $\mathbb{K}G_{r,n}$ и F следующим образом. Рассмотрим множество $M_{r,n}$ всех матриц $r \times n$ ранга r с элементами из $\mathbb{K}$. Строчки матрицы $m \in M_{r,n}$ будем интерпретировать как векторы пространства $\mathbb{K}^n$. Они образуют базис подпространства $[m] \in \mathbb{K}^n$. Группа $GL(r, \mathbb{K})$ действует на $M_{r,n}$ умножением слева, переводя строчки матрицы $M_{r,n}$ в их линейные комбинации и тем самым меняя базис пространства $[m]$. Это позволяет отождествить подпространство $[m] \in \mathbb{K}G_{r,n}$ с орбитой матрицы m под действием группы $GL(r, \mathbb{K})$. Множество $\mathbb{K}G_{r,n}$ является, таким образом, фактор-пространством $M_{r,n}/GL(r, \mathbb{K})$. Гладкая или, комплексная структура на $M_{r,n}$ определяет соответствующую структуру на фактор-пространстве $\mathbb{K}G_{r,n}$.

Построим теперь атлас многообразия, аналогичный атласу для проективного пространства. Матрице $m \in M_{r,n}$ и набору чисел $\alpha = \{1 \leq \alpha_1 < \alpha_2, ..., < \alpha_r \leq n\}$ отвечает $r \times r$ матрица $m_\alpha \in GL(r, \mathbb{K})$, составленная из столбцов α. Обозначим через F_α множество всех матриц $m \in M_{r,n}$ таких, что матрица m_α невырождена. Орбиты $[m]$ матриц $m \in F_\alpha$ образуют открытое множество $[F_\alpha] = \bigcup\limits_{m \in F_\alpha} [m] \subset \mathbb{K}G_{r,n}$. Совокупность всех таких множеств является покрытием многообразия $\mathbb{K}G_{r,n}$.

Сопоставим матрице $m \in F_\alpha$ матрицу $m_{\bar{\alpha}} \in M_{r,n-r}$, получающуюся из матрицы $m_\alpha^{-1} m$ выкидыванием столбцов α. Зададим теперь функцию $f_\alpha : [F_\alpha] \to \mathbb{K}^{r \times (n-r)}$ равенством $f_\alpha([m]) = m_{\bar{\alpha}}$. Пары $([F_\alpha], f_\alpha)$ образуют гладкий атлас многообразия $\mathbb{K}G_{r,n}$.

Упражнение 8.7. *Найти функции перехода между картами атласа.*

Векторное пространство $\pi_{r,n}^{-1}([m])$ порождено строками матрицы $m_\alpha^{-1} m$. Сопоставив этим строкам стандартный базис пространства $\mathbb{K}^r$, порождает изоморфизм векторных пространств $\pi_{r,n}^{-1}([m]) \to \mathbb{K}^r$. Совокупность этих изоморфизмов порождает локальную тривиализацию $h_\alpha : \pi_{r,n}^{-1}([F_\alpha]) \to [F_\alpha] \times \mathbb{K}^r$.

Упражнение 8.8. *Найти функции перехода между этими тривиализациями.*

Термин "универсальное расслоение"объясняется следующим фактом

Теорема 8.1. *Всякое векторное расслоение $\pi : E \to X$ ранга r над компактным гладким многообразием X изоморфно обратному образу универсального расслоения $\pi_{r,N} : F \to \mathbb{R}G_{r,N}$ для некоторого гладкого отображения $\Phi : X \to \mathbb{R}G_{r,N}$.*

Доказательство. Обозначим через $l_1, ..., l_r$ базис сопряженного пространства $(\mathbb{R}^r)^*$ такой, что $l_i(x^1, ..., x^r) = x^i$. Покроем X конечной системой тривиализаций $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ расслоения $\pi : E \to X$. Функционалы $l_1, ..., l_r$ порождают сечения $l_1^\alpha, ..., l_r^\alpha$ на U_α ограничения сопряженного расслоения $\pi^* : E^* \to X$. Впишем замкнутое покрытие $\{V_\beta\}$ в открытое покрытие $\{U_\alpha\}$. Рассмотрим ограничения $l_1^\beta, ..., l_r^\beta$ сечений $l_1^\alpha, ..., l_r^\alpha$ на элементы покрытия $\{V_\beta\}$. Используя мягкость пучка, продолжим сечения $l_1^\beta, ..., l_r^\beta$ до глобальных сечений $\tilde{l}_1^\beta, ..., \tilde{l}_r^\beta$ расслоения $\pi^* : E^* \to X$. Проделав эту процедуру для всех элементов покрытия $\{V_\beta\}$ находим набор глобальных сечений $(\tilde{l}_1, ..., \tilde{l}_N) = \bigcup_\alpha (\tilde{l}_1^\alpha, ..., \tilde{l}_r^\alpha)$ расслоения $\pi^* : E^* \to X$, имеющий ранг r в любой точке $p \in X$.

Сопоставим теперь базису $e_1, ..., e_r$ в слое $E_p = \pi^{-1}(p)$ матрицу $W_p = \{w_{ij}\}$, где $w_{ij} = \tilde{l}_j(e_i)$. Обозначим через $[W_p] \subset \mathbb{R}^N$ векторное пространство, порожденное строками этой матрицы. Замена базиса $e_1, ..., e_r$ эквивалентна умножению матрицы W_p слева на невырожденную матрицу. Поэтому подпространство $[W_p] \in \mathbb{R}G_{r,N}$ не зависит от выбора базиса. Таким образом, мы построили гладкое отображение $\Phi : X \to \mathbb{R}G_{r,N}$, где $\Phi(p) = [W_p]$. Отображение, сопоставляющее базису $e_1, ..., e_r$ строки матрицы W_p, порождает изоморфизм между расслоением $\pi : E \to X$ и обратным образом универсального расслоения $\pi_{r,N} : F \to \mathbb{R}G_{r,N}$ при отображении $\Phi : X \to \mathbb{R}G_{r,N}$. $\square$

Замечание 8.1. *Можно доказать, что всякое векторное расслоение с не обязательно компактной базой может быть покрыто конечной системой тривиализаций. Таким образом, теорема 8.1 верна для произвольного гладкого, не обязательно компактного многообразия.*

9. Комплексные многообразия и когомологии Дольбо.

9.1. **Дифференциальные формы.** Все естественные не постоянные пучки на гладком многообразии являются модулями над мягким кольцом гладких функций и, по-этому когомологии со значениями в этих пучках нулевые. Естественные пучки на комплексном многообразии X не мягкие и порожденные ими когомологии являются важнейшими характеристиками многообразия. Не мягкими пучками являются, в частности пучки Ω^p голоморфных p-форм. Когомологии $H^q(X, \Omega^p)$ называются когомологии Дальбо. В этом разделе мы опишем их с помощью пучков $\mathcal{E}^{p,q}_{\mathbb{C}}$ гладких комплекснозначных дифференциалов на X.

Конструкцию нужных нам пучков мы начнем с конструкций линейной алгебры. Комплексное векторное пространство V порождает вещественное векторное пространство $V_{\mathbb{R}}$, где $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}} V$. Умножение на i в пространстве V порождает линейный оператор $J : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$. Сопоставим базису $(e_1, ..., e_n)$ пространства V базис $(e_1, f_1, ..., e_n, f_n)$ пространства $V_{\mathbb{R}}$, где $f_k = ie_k$. Тогда $J(e_k) = f_k$, $J(f_k) = -e_k$.

Рассмотрим теперь комплексное векторное пространство $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \{\alpha^k e_k + \beta^k f_k | \alpha^k, \beta^k \in \mathbb{C}\}$. (Здесь и далее используется стандартное соглашение о суммировании по одинаковым индексам.) Положим $d(\xi^\sigma e_\sigma) = d(\xi^\sigma) e_\sigma)$ Продолжим J до $\mathbb{C}$-линейного оператора $J_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$. Тогда, как и раньше, $J^2_{\mathbb{C}} = -1$. Комплексное пространство $V_{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму комплексных подпространств $V^{1,0} \bigoplus V^{0,1}$,где $V^{1,0} = \{v \in V_{\mathbb{C}} | J_{\mathbb{C}} v = iv\}$ и $V^{0,1} = \{v \in V_{\mathbb{C}} | J_{\mathbb{C}} v = -iv\}$. Проекция $I : V_{\mathbb{C}} \to V$, где $I(e_k) = e_k$, $I(f_k) = 0$, порождает $\mathbb{C}$-изоморфизм $I : V^{1,0} \to V$.

Пространство внешних форм $\bigwedge^r V_{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму $\bigwedge^r V_{\mathbb{C}} = \sum_{p+q=r} \bigwedge^{p,q} V$, где $\bigwedge^{p,q} V$ подпространство, порожденное внешними формами вида $u \wedge v$, такими, что $u \in \bigwedge^p V^{1,0}$, $v \in \bigwedge^q V^{0,1}$. Обозначим через $Q : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{R}$-линейный оператор $Q(\alpha^k e_k + \beta^k f_k) = \bar{\alpha}^k e_k - \bar{\beta}^k f_k$.

Упражнение 9.1. *Доказать, что оператор Q не зависит от выбора базиса $(e_1, ..., e_n)$ и $Q(V^{1,0}) = V^{0,1}$.*

Рассмотрим теперь комплексное многообразие X. Кокасательное пространство T^*_z в точке $z \in X$ является комплексным векторным пространством. Эти пространства порождают голоморфное расслоение $\bigwedge^r T^* \to X$. Применяя предыдущую конструкцию к каждому слою находим гладкое расслоение $\bigwedge^r (T^*_z)_{\mathbb{C}}$ и его представление в виде суммы гладких расслоений $\bigwedge^r (T^*_z)_{\mathbb{C}} = \sum_{p+q=r} \bigwedge^{p,q}(T^*_z)$. Сечения $\mathcal{E}^r_{\mathbb{C}}(U) = \sum_{p+q=r} \mathcal{E}^{p,q}_{\mathbb{C}}(U)$ этих расслоений называются *комплекснозначными гладкими дифференциальными формами полной степени* r. Они образуют мягкие пучки модулей над кольцом гладких функций и связаны дифференциалами $d : \mathcal{E}^r_{\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{E}^{r+1}_{\mathbb{C}}(U)$.

Рассмотрим естественные проекции $\pi_{p,q} : \mathcal{E}^r_{\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{E}^{p,q}_{\mathbb{C}}(U)$ и операторы

$$\partial = \pi_{p+1,q} d : \mathcal{E}^{p,q}_{\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{E}^{p+q+1}_{\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{E}^{p+1,q}_{\mathbb{C}}(U),$$

$$\bar\partial = \pi_{p,q+1} d : \mathcal{E}^{p,q}_{\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{E}^{p+q+1}_{\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{E}^{p,q+1}_{\mathbb{C}}(U).$$

Упражнение 9.2. *Доказать, что* $Q\partial Q = \bar\partial$.

Опишем теперь действие операторов $\partial, \bar\partial$ в локальной карте $z : U \to \mathbb{C}^n$. Комплексные локальные координаты $z = (z^1, ..., z^n)$ порождают вещественные локальные координаты $z^k = x^k + iy^k$. Дифференциалы координатных функций образуют ковекторные поля $(dz^1, ..., dz^n)$, $(dx^1, ..., dx^n, dy^1, ..., dy^n)$. Обозначим через $(\frac{\partial}{\partial z^1}, ..., \frac{\partial}{\partial z^n})$, $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial}{\partial y^n})$ двойственные им векторные поля. Тогда $dz^k = dx^k + idy^k$ и $\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k})$. Положим $d\overline{z^k} = dx^k - idy^k$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z^k}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k})$.

Упражнение 9.3. *Векторы* $\{\frac{\partial}{\partial z^k} | k = 1, ..., n\}$ *и* $\{\frac{\partial}{\partial \overline{z^k}} | k = 1, ..., n\}$ *образуют базисы пространств* $(T_z)^{1,0}$ *и* $(T_z)^{0,1}$ *соответственно. Ковекторы* $\{dz^k | k = 1, ..., n\}$ *и* $\{d\overline{z^k} | k = 1, ..., n\}$ *образуют базисы пространств* $(T^*_z)^{1,0}$ *и* $(T^*_z)^{0,1}$ *соответственно.*

Лемма 9.1. $\partial = dz^k \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}$, $\bar\partial = d\overline{z^k} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}$, $d = \partial + \bar\partial$, $\partial^2 = \bar\partial^2 = \partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0$.

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathcal{E}^{p,q}_{\mathbb{C}}(U)$, $\sum_1 = dz^k \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}\xi$ и $\sum_2 = d\overline{z^k} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}\xi$. Тогда $d\xi = \sum_1 + \sum_2$, причем $\sum_1 \in \mathcal{E}^{p+1,q}_{\mathbb{C}}(U)$ и $\sum_2 = \mathcal{E}^{p,q+1}_{\mathbb{C}}(U)$. Таким образом, $\partial\xi = \pi_{p+1,q} d\xi = \sum_1 = dz^k \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}\xi$ и $\bar\partial\xi = \pi_{p,q+1} d\xi = \sum_2 = d\overline{z^k} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}\xi$. Следовательно, $\partial = dz^k \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}$ и $\bar\partial = d\overline{z^k} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}$ и $d = \partial + \bar\partial$. Ввиду $d^2 = 0$ отсюда следует, что $0 = (\partial + \bar\partial)^2\xi = \partial^2\xi + \bar\partial^2\xi + (\partial\bar\partial + \bar\partial\partial)\xi$, причем $\partial^2\xi \in \mathcal{E}^{p+2,q}_{\mathbb{C}}(U)$, $\bar\partial^2\xi \in \mathcal{E}^{p,q+2}_{\mathbb{C}}(U)$, $(\partial\bar\partial + \bar\partial\partial)\xi \in \mathcal{E}^{p+1,q+1}_{\mathbb{C}}(U)$. Таким образом, $\partial^2 = \bar\partial^2 = \partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0$. □

Следующая лемма аналогична лемме Пуанкаре и доказывается по той же схеме

Лемма 9.2. *(Дольбо). Пусть* $\omega \in \mathcal{E}^{p,q}_{\mathbb{C}}(U)$ *и* $z \in U$. *Тогда в некоторой окрестности* V *точки* z*: 1) условия* $\partial\omega = 0$ *и* $\omega \in \partial\mathcal{E}^{p-1,q}_{\mathbb{C}}(V)$ *эквивалентны; 2) условия* $\bar\partial\omega = 0$ *и* $\omega \in \bar\partial\mathcal{E}^{p,q-1}_{\mathbb{C}}(V)$ *эквивалентны.*

9.2. **Когомологии Дольбо.** Голоморфное отображение комплексных многообразий $\pi : E \to X$ называется *голоморфным векторным расслоением ранга* r, если

1) слой $E_z = \pi^{-1}(z)$ каждой точки $z \in X$ наделен структурой комплексного векторного пространства размерности r;

2) у каждой точки $z \in X$ существует окрестность $z \in U \in X$ и голоморфное отображение $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$, называемое *локальной тривиализацией*, такие,

что отображение $h|_{E_x} : E_x \to x \times \mathbb{C}^r$ является изоморфизмом комплексных векторных пространств для любого $x \in U$.

Пучок Ω^p голоморфных сечений голоморфного векторного расслоения $\bigwedge^r T^* \to X$ называется пучком *голоморфных дифференциальных форм степени* p. Другими словами, $\Omega^p(U) = \{\omega \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,0}(U) | \bar\partial\omega = 0\} = \{\omega = \sum a_{i_1 \dots i_p} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} | \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial \bar z^{i_j}} = 0\}$.

Упражнение 9.4. *Доказать, что последовательность пучков* $0 \to \mathbb{C} \to \Omega^0 \xrightarrow{\partial} \Omega^1 \xrightarrow{\partial} \Omega^2 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \Omega^n \xrightarrow{\partial} 0$ *является точной.*

Теорема 9.1. *(Дольбо).* $H^q(X, \Omega^p) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+1}(X)) / \mathrm{Im}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(X))$

Доказательство. Последовательность пучков $0 \to \Omega^p \xrightarrow{in} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,n} \xrightarrow{\bar\partial} 0$ является резольвентой ввиду леммы 9.1 и леммы Дольбо. Она ациклична ввиду мягкости пучков $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}$ (следствия 7.1 и 4.1). Поэтому утверждение теоремы Дольбо следует из теоремы 5.1. □

Для компактного многообразия размерности когомологий $h^{p,q} = \dim H^q(X, \Omega^p)$ конечны и называются *числами Ходжа.*

Пусть теперь $\pi : E \to X$ — голоморфное расслоение ранга r над комплексным многообразием X и $\mathcal{E}_E$ — пучок его голоморфных сечений. Тогда голоморфные сечения Ω_E^p расслоения $(\bigwedge^p T^* X) \bigotimes_{\mathbb{C}} E$ называются *голоморфными дифференциальными формами степени* p *с коэффициентами в* E. Сечения пучка $\mathcal{E}_E^{p,q} = \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q} \bigotimes_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_E$ называются *дифференциальными (p,q)-формами с коэффициентами в* E. Рассмотрим оператор $\bar\partial_E : \mathcal{E}_E^{p,q} \to \mathcal{E}_E^{p,q+1}$ такой, что $\bar\partial_E(\omega \otimes e) = \bar\partial\omega \otimes e$.

Упражнение 9.5. *Доказать, что оператор* $\bar\partial_E$ *корректно определен для любого голоморфного расслоения* E*, в то время как оператор* $\partial_E(\omega \otimes e) = \partial\omega \otimes e$ *— лишь для одномерного тривиального расслоения.*

Повторяя рассуждения теоремы Дольбо, находим

Теорема 9.2. $H^q(X, \Omega_E^p) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}_E^{p,q}(X) \xrightarrow{\bar\partial_E} \mathcal{E}_E^{p,q+1}(X)) / \mathrm{Im}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\bar\partial_E} \mathcal{E}_E^{p,q}(X))$.

10. Связности в расслоениях.

10.1. **Связности и метрики.** Гладкое векторное расслоение, каждый слой которого имеет структуру комплексного векторного пространства комплексной размерности r, называется $\mathbb{C}$- *расслоением ранга* r. Далее мы будем рассматривать только такие расслоения, обычно не оговаривая это специально.

Упражнение 10.1. *Сформулировать и доказать аналог теоремы 8.1 для* $\mathbb{C}$-*расслоений.*

Пусть $\pi : E \to X$ — гладкое $\mathbb{C}$-расслоение ранга r над гладким многообразием X. Тогда сечения расслоения $\bigwedge^p T^* X \bigotimes_{\mathbb{R}} E$ называются *дифференциальными формами степени* p *с коэффициентами в* E. Они образуют модулей $\mathcal{E}_E^p$ над пучком колец $\mathcal{E}^0$ гладких комплекснозначных функций на X.

В локальной тривиализации $f : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ дифференциальные формы с коэффициентами в E имеют вид $\omega^\sigma e_\sigma$, где $e_\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ — векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^r$, и $\omega^\sigma(x) \in \mathcal{E}^p(U)$ — дифференциальные p-формы на X. То есть $\omega^\sigma e_\sigma = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ ... \\ \omega^r \end{pmatrix}$

Связностью в расслоении $\pi : E \to X$ называется морфизм пучков $\nabla : \mathcal{E}^0_E \to \mathcal{E}^1_E$ такой, что $\nabla(\varphi\xi) = d\varphi\xi + \varphi\nabla(\xi)$ при $\varphi \in \mathcal{E}^0$ и $\xi \in \mathcal{E}^0_E$.

Матрицей связности в локальной тривиализации $f : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ называется матрица $\theta = \theta(\nabla, f) = \{\theta^\rho_\sigma \in \mathcal{E}^1(U) | \rho, \sigma = 1, \ldots, r\}$, где $\nabla(e_\sigma) = \theta^\rho_\sigma e_\rho$. Она полностью определяет связность, причем $\nabla(\xi) = \nabla(\xi^\sigma e_\sigma) = d\xi^\sigma e_\sigma + \xi^\sigma \nabla(e_\sigma) = (d\xi^\rho + \xi^\sigma \theta^\rho_\sigma)e_\rho = (d+\theta)\xi$.

Замена тривиализации $f : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ на $\tilde{f} : \pi^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U} \times \mathbb{C}^r$ переводит базис сечений $e = (e_1, ...e_r)$ над $U \bigcap \tilde{U}$ в базис сечений $\tilde{e} = eg$, где $g : U \bigcap \tilde{U} \to GL(r, \mathbb{C})$.

Упражнение 10.2. *Доказать, что* $\theta(\nabla, \tilde{f}) = g^{-1}\theta(\nabla, f)g + g^{-1}dg$.

Продолжим оператор связности ∇ до оператора $\nabla : \mathcal{E}^p_E \to \mathcal{E}^{p+1}_E$, заданного в выбранной тривиализации формулой $\nabla(\xi) = d\xi + \theta \wedge \xi$.

Упражнение 10.3. *Доказать, что это определение не зависит от выбора тривиализации.*

Отображение $(.,.) : V \times V \to \mathbb{C}$ называется *эрмитовой метрикой на векторном пространстве* V, если оно линейно по первому аргументу, $(x, y) = \overline{(y, x)}$ и $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$.

Пример 10.1. . *Для* $x = (x^1, ..., x^r), y = (y^1, ..., y^r) \in \mathbb{C}^r$ *положим* $(x, y) = \sum_i^r x^i \overline{y^i}$.

Эрмитовой метрикой на расслоении $\pi : E \to X$ называется эрмитова метрика $(.,.)_p$ на каждом его слое E_p, такая, что для любых сечений $\xi, \eta \in \mathcal{E}_E(U)$ функция (ξ, η) гладкая на U. Расслоение, наделенное эрмитовой метрикой, называется *эрмитовым расслоением. Матрицей эрмитовой метрики* в локальной тривиализации $f : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ называется матрица $h = h(f) = \{h_{e_i, e_j} = (e_i, e_j)\}$.

Упражнение 10.4. *Доказать, что при замене тривиализации* $\tilde{e} = eg$ *матрица эрмитовой метрики преобразуется по закону* $h(\tilde{f}) = \overline{g^{\mathbf{t}}} h(f) g$, *где* $\mathbf{t}$ *означает транспонирование матрицы.*

Эрмитова метрика порождает оператор $(.,.) : \mathcal{E}^p_E(U) \times \mathcal{E}^q_E(U) \to \mathcal{E}^{p+q}(U)$, где $(\omega \otimes \xi, \omega' \otimes \xi') = \omega \wedge \omega'(\xi, \xi')$, для $\omega \in \bigwedge^p T^*X(U)$, $\omega' \in \bigwedge^q T^*X(U)$, $\xi, \xi' \in \mathcal{E}_E(U)$.

Связность ∇ называется *согласованной с эрмитовой метрикой* $(.,.)$, если $d(\xi, \xi') = (\nabla(\xi), \xi') + (\xi, \nabla(\xi'))$. Такая связность называется также *эрмитовой связностью.*

Упражнение 10.5. *Доказать, что в локальной тривиализации условие согласованности имеет вид* $dh = h\theta + \overline{\theta}^{\mathbf{t}} h$, *где* h *и* θ — *матрицы метрики и связности.*

Теорема 10.1. *Всякое расслоение допускает эрмитову метрику и согласованную с ней эрмитову связность.*

Доказательство. Рассмотрим систему тривиализаций, базы которых образуют локально конечное покрытие. В локальной тривиализации $f^\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ с базисом сечений $e = (e_1, ..., e_r) \subset \mathcal{E}_E(U)$ зададим эрмитову метрику матрицей $h^\alpha(e) = \{h^\alpha_{e_i, e_j}\} = \delta_{ij}$ и согласованную с ней связность ∇^α, с матрицей $\theta(e) = 0$. Далее, используя подчиненное покрытию разбиение единицы ρ_α, "склеим"метрики и связности различных тривиализаций в глобальные эрмитову метрику $(.,.) = \sum \rho_\alpha (.,.)^\alpha$ и связность $\nabla = \sum \rho_\alpha \nabla^\alpha$. Проверка согласованности остается в качестве упражнения. $\square$

10.2. **Кривизна связности.** Сопоставим матрице связности $\theta = \theta(\nabla, f) = \{\theta^\rho_\sigma\}$ матрицу 2-форм $K = K(\nabla, f) = d\theta + \theta \wedge \theta$ (т.е $K^\rho_\sigma = d\theta^\rho_\sigma + \theta^\rho_\alpha \wedge \theta^\alpha_\sigma$) и назовем ее *матрицей кривизны связности* ∇ в тривиализации f.

Упражнение 10.6. *Доказать, что при замене тривиализации* $\tilde{e} = eg$ *матрица кривизны связности преобразуется по закону* $K(\nabla, \tilde{f}) = g^{-1} K(\nabla, f) g$.

Расслоению $\pi : E \to X$ отвечает сопряженное расслоение $\pi^* : E^* \to X$ и спаривание на пространстве сечений $< .,. >$: $E^*(U) \times E(U) \to \mathcal{E}(U)$. Локальной тривиализации $f : (\pi)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ с базисом сечений $e(f) = (e_1, ...e_r)$ отвечает сопряженная тривиализация $f^* : (\pi^*)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ с базисом сечений $e^*(f) = (e_1^*, ...e_r^*)$, где $< e_i, e_j^* >= \delta_{ij}$. Положим $\theta^*(\nabla, f^*) = -(\theta(\nabla, f))^{\mathbf{t}}$.

Упражнение 10.7. *Доказать, что матрица* $\theta^*(\nabla, f^*)$ *является матрицей некоторой связности* ∇^*. *Доказать, что матрица кривизны этой связности* $K(\nabla^*, f^*) = -(K(\nabla, f))^{\mathbf{t}}$. *Доказать, что* $d < \omega, \xi >=< \nabla^* \omega, \xi > + < \omega, \nabla \xi >$ *для* $\omega \in (\mathcal{E}^*)^0_E$, $\xi \in \mathcal{E}^0_E$, *и это соотношение однозначно определяет связность* ∇^*.

Таким образом связности ∇ в расслоении $\pi : E \to X$ отвечает *сопряженная связность* ∇^* в сопряженном расслоении $\pi^* : E^* \to X$.

Согласно упражнению 10.6 , отображение $f^{-1} K(\nabla, f) f : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(U)$ порождает не зависящие от тривиализации линейные операторы $E_p \to E_p$ для каждого $p \in U$. Таким образом, матрица кривизны определяет сечение расслоения $K = K(\nabla) \in \mathcal{E}^2_{Hom(E,E)}(X)$, называемое *тензором кривизны связности* ∇.

Умножение на тензор кривизны задает гомоморфизм $K : \mathcal{E}^p_E(U) \to \mathcal{E}^{p+2}_E(U)$. При этом $\nabla^2 = K$, поскольку $(d+\theta)(d+\theta)\xi = d^2\xi + \theta d\xi + d(\theta\xi) + \theta \wedge \theta\xi = \theta d\xi + d\theta\xi - \theta d\xi + \theta \wedge \theta\xi = K\xi$.

Определим *скобку Ли* $[\chi, \psi] \in \mathcal{E}^{p+q}_{Hom(E,E)}(U)$ между операторными полями $\chi \in \mathcal{E}^p_{Hom(E,E)}(U)$ и $\psi \in \mathcal{E}^q_{Hom(E,E)}(U)$. В произвольной тривиализации f расслоения E поля χ и ψ представляются матрицами $\chi(f)$ и $\psi(f)$ с элементами из $\mathcal{E}^p(U)$ и $\mathcal{E}^q(U)$ соответственно. Используя умножение матриц, положим $[\chi, \psi](f) = \chi(f) \wedge \psi(f) - (-1)^{pq} \psi(f) \wedge \chi(f)$.

Упражнение 10.8. *Доказать, что это определение не зависит от выбора тривиализации.*

Лемма 10.1. *(Тождество Бьянки)* $dK(f) = [K(f), \theta(f)]$.

Доказательство. Опуская для удобства (f), находим $dK = d(d\theta+\theta\wedge\theta) = d\theta\wedge\theta-\theta\wedge d\theta$ и $[K,\theta] = [d\theta+\theta\wedge\theta,\theta] = d\theta\wedge\theta+\theta\wedge\theta\wedge\theta-(-1)^2(\theta\wedge d\theta+\theta\wedge\theta\wedge\theta)$. □

11. Классы Черна.

11.1. **Инвариантные однородные формы.** Функция $\varphi : M(r,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ на множестве матриц $r\times r$ называется *многочленом*, если она представляется многочленом от матричных элементов. Многочлен φ называется *инвариантной формой*, если $\varphi(gAg^{-1}) = \varphi(A)$ для всех $A\in M(r,\mathbb{C})$, $g\in GL(r,\mathbb{C})$ и *однородной формой степени* m, если $\varphi(\lambda A) = \lambda^m\varphi(A)$ для всех $A\in M(r,\mathbb{C})$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

Функция $\tilde\varphi : M(r,\mathbb{C})\times ...\times M(r,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, линейная по всем m аргументам, называется *m-линейной формой*. Такая форма называется *инвариантной*, если $\tilde\varphi(gA_1g^{-1},...,gA_mg^{-1}) = \varphi(A_1,...,A_m)$.

Упражнение 11.1. *Доказать, что всякая инвариантная однородная форма φ степени m имеет вид $\varphi(A) = \tilde\varphi(A,...,A)$, где $\tilde\varphi$ — инвариантная m-линейная форма.*

Лемма 11.1. *Пусть $\tilde\varphi$ — инвариантная m-линейная форма. Тогда* $\sum\limits_{j=1}^{m}\tilde\varphi(A_1,...,[A_j,B],...,A_m) = 0$ *для любых $A_i, B\in M(r,\mathbb{C})$.*

Доказательство. При $m=2$ имеем $0 = \tilde\varphi(e^{-tB}A_1e^{tB}, e^{-tB}A_2e^{tB}) - \tilde\varphi(A_1,A_2) = \tilde\varphi(e^{-tB}A_1e^{tB}, e^{-tB}A_2e^{tB}) - \tilde\varphi(e^{-tB}A_1e^{tB},A_2) + \tilde\varphi(e^{-tB}A_1e^{tB},A_2) - \tilde\varphi(A_1,A_2) = \tilde\varphi(e^{-tB}A_1e^{tB},(e^{-tB}A_2e^{tB} - A_2)) + \tilde\varphi((e^{-tB}A_1e^{tB} - A_1), e^{-tB}A_2e^{tB}) = \tilde\varphi(e^{-tB}A_1e^{tB}, t[A_2,B]) + O(|t^2|)) + \tilde\varphi(t[A_1,B] + O(|t^2|), A_2) = \tilde\varphi(A_1,t[A_2,B]) + \tilde\varphi(t[A_1,B],A_2) + O(|t^2|) = t(\tilde\varphi(A_1,[A_2,B]) + \tilde\varphi([A_1,B],A_2)) + O(|t^2|)$. Откуда $\tilde\varphi(A_1,[A_2,B]) + \tilde\varphi([A_1,B],A_2)) = 0$. Общий случай получается аналогичной конструкцией. □

m-линейная форма $\tilde\varphi$ на числовых матрицах продолжается на матрицы, где в качестве матричных элементов выступают дифференциальные формы на многообразии X. Она определяется как m-линейная над $\mathbb{C}$ функция со значениями в $\mathcal{E}^*(X)$ такая, что $\tilde\varphi(\omega_1A_1,...,\omega_mA_m) = \omega_1\wedge...\wedge\omega_m\tilde\varphi(A_1,...,A_m)$ для числовых матриц A_i.

Упражнение 11.2. *Пусть $\tilde\varphi$ — m-линейная форма и A_i, B — матрицы, где в качестве матричных элементов выступают дифференциальные формы степеней $\deg A_i$ и $\deg B$ соответственно. Тогда* $d\tilde\varphi(A_1,...,A_m) = \sum\limits_{j=1}^{m}(-1)^{\delta(j)}\tilde\varphi(A_1,...,dA_j,...,A_m)$, *где* $\delta(j) = \sum\limits_{i<j}\deg A_i$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{m}(-1)^{\epsilon(j)}\tilde\varphi(A_1,...,[A_j,B],...,A_m) = 0$, *где* $\epsilon(j) = \delta(j)\deg B$.

Теорема 11.1. *Пусть $\pi : E\to X$ — расслоение ранга r над гладким многообразием X и φ — инвариантная однородная форма степени m на $M(r,\mathbb{C})$. Рассмотрим связность $\nabla : \mathcal{E}^0_E \to \mathcal{E}^1_E$, и ее матрицу кривизны $K(\nabla,f)$ в базисе f. Тогда дифференциальная форма $\varphi(K(\nabla,f))$ порождает элемент группы когомологий $\varphi(E)\in H^{2m}(X,\mathbb{C})$, который не зависит от выбора связности ∇ и базиса f.*

Доказательство. При замене базиса f матрица $K(\nabla, f)$ переходит в сопряженную и, следовательно, дифференциальная форма $\varphi(K(\nabla, f)) \in \mathcal{E}^{2m}(X)$ не меняется. Положим $K = K(\nabla, f))$ и рассмотрим m-линейную форму $\tilde{\varphi}$, порождающую φ. Используя тождество Бьянки, лемму и упражнения этого раздела, находим, что $d\varphi(K) = d\tilde{\varphi}(K, ..., K) = \sum \tilde{\varphi}(K, ..., dK, ..., K) = \sum \tilde{\varphi}(K, ..., [K, \theta], ..., K) = 0$. Таким образом, дифференциальная форма $\varphi(K)$ порождает элемент группы когомологий $\varphi(K) \in H^{2m}(X, \mathbb{C})$.

Нам осталось доказать, что класс когомологий $\varphi(K(\nabla, f))$ не зависит от связности ∇. Пусть ∇_0 и ∇_1 — связности с матрицами кривизны $K_0 = K(\nabla_0, f)$ и $K_1 = K(\nabla_1, f)$. Рассмотрим семейство связностей $\nabla_t = t\nabla_1 + (1-t)\nabla_0$. Ему отвечают матрицы связности $\theta_t = \theta(\nabla_t, f)$ и кривизны $K_t = K(\nabla_t, f)$. Сопоставим связности $\nabla_t(\xi) = d\xi + \theta_t\xi$ оператор $\dot{\nabla}_t : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^1$, где $\dot{\theta}_t(\xi) = \frac{\partial}{\partial t}(d\xi + \theta_t\xi) = \dot{\theta}_t\xi$. Рассмотрим функцию $\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \sum\limits_{\alpha=1}^{m} \tilde{\varphi}(\xi, ..., \xi, \eta, \xi, ..., \xi)$, где α — место, на котором стоит η. Докажем, что $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(K_t) = d\hat{\varphi}(K_t, \dot{\theta}_t)$. Для краткости будем опускать индекс t. Тогда

$$d\hat{\varphi}(K, \dot{\theta}) = d\hat{\varphi}(K, \dot{\theta}) = d(\sum_{\alpha=1}^{m} \tilde{\varphi}(K, ..., \dot{\theta}, ..., K)) =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{m}(\sum_{i<\alpha} \tilde{\varphi}(K, ..., dK, ..., \dot{\theta}, ..., K) + \tilde{\varphi}(K, ..., d\dot{\theta}, ..., K) - \sum_{i>\alpha} \tilde{\varphi}(K, ..., \dot{\theta}, ..., dK, ..., K)),$$

где α — место, на котором стоит θ, и i — место, на котором стоит dK.

Используя тождество Бьянки и соотношение $K = d\theta + \theta \wedge \theta$ преобразуем последнее равенство к виду $d\hat{\varphi}(K, \dot{\theta}) =$

$$\sum_{\alpha=1}^{m}(\sum_{i<\alpha} \tilde{\varphi}(K, ..., [K, \theta], ..., \dot{\theta}, ..., K) + \tilde{\varphi}(K, ..., \dot{K} - [\dot{\theta}, \theta], ..., K) - \sum_{i>\alpha} \tilde{\varphi}(K, ..., \dot{\theta}, ..., [K, \theta], ..., K)) =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \tilde{\varphi}(K, ..., \dot{K}, ..., K) + \sum_{\alpha=1}^{m}(\sum_{i<\alpha} \tilde{\varphi}(K, ..., [K, \theta], ..., \dot{\theta}, ..., K) +$$

$$\tilde{\varphi}(K, ..., -[\dot{\theta}, \theta], ..., K) - \sum_{i>\alpha} \tilde{\varphi}(K, ..., \dot{\theta}, ..., [K, \theta], ..., K)).$$

Последняя сумма, согласно упражнению 11.2, равна 0.

Таким образом, $d\hat{\varphi}(K_t, \dot{\theta}_t) = \sum\limits_{\alpha=1}^{m} \tilde{\varphi}(K_t, ..., \dot{K}_t, ..., K_t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}(K_t, ..., K_t) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(K_t)$. Отсюда $\varphi(K_1) - \varphi(K_0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\varphi(K_t)dt = \int_0^1 d\hat{\varphi}(K_t, \dot{\theta}_t)dt = d\int_0^1 \hat{\varphi}(K_t, \dot{\theta}_t)dt = d\omega$, где $\omega = \int_0^1 \hat{\varphi}(K_t, \dot{\theta}_t)dt \in \mathcal{E}^{2m-1}(X)$. Следовательно, связности ∇_0 и ∇_1 порождают один и тот же класс когомологий. □

11.2. **Классы Черна.** Пусть $\pi : E \to X$ — расслоение ранга r над гладким многообразием X. Рассмотрим произвольную связность $\nabla : \mathcal{E}_E^0 \to \mathcal{E}_E^1$, ее кривизну $K(\nabla, f) = d\theta + \theta \wedge \theta$ и порожденную кривизной дифференциальную форму $c(\nabla, f) = \det(I + \frac{i}{2\pi}K(\nabla, f)) \in \mathcal{E}^*(X)$. Согласно теореме 10.1 она порождает независящий от связности K и базиса f элемент группы когомологий $c(E) \in H^*(X, \mathbb{C})$.

Этот класс $c(E)$ называется *полным классом Черна расслоения* $\pi : E \to X$. Он является суммой $c(E) = c_1(E) + ... + c_n(E)$, где $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{C})$. Элементы $c_i(E)$ называются *i-тыми классами Черна* расслоения $\pi : E \to X$. Они названы так в честь открывшего их американского математика китайского происхождения S.S.Chern. В и некоторых других страх ети классы называют также *классами Чженя*, транскрибируя китайский вариант его фамилии. Классы Черна комплексификации векторного $\mathbb{R}$-расслоения называются *классами Понтрягина*.

Теорема 11.2. *Полный класс Черна $c(E)$ расслоения $\pi : E \to X$ принадлежит группе $H^*(X, \mathbb{R})$.*

Доказательство. Согласно теореме 10.1 расслоение π допускает эрмитову метрику $(.,.)$ и согласованную с ней связность ∇. Их матрицы связаны условием $dh = h\theta + \overline{\theta}^{\mathbf{t}} h$. В базисе $(f_i, f_j) = \delta_{ij}$ матрица θ, а значит и матрица K, косоэрмитовы, то есть $K(\nabla, f) = -\overline{K(\nabla, f)}$. Таким образом $\overline{\det(I + \frac{i}{2\pi} K(\nabla, f))} = \det(I - \frac{i}{2\pi} \overline{K(\nabla, f)}) = \det(I + \frac{i}{2\pi} K(\nabla, f))$. Следовательно, класс когомологий $c(E)$ представляется вещественной дифференциальной формой и принадлежит группе $H^*(X, \mathbb{R})$. □

Классы Черна обладают рядом замечательных свойств.

Теорема 11.3. (1) $c_0(E) = 1$*;*

(2) $c_j(E) = 0$*, если E — тривиальное расслоение и $j > 0$;*

(3) *изоморфные расслоения имеют одинаковые классы Черна;*

(4) *классы Черна сопряженных расслоений E и E^* связаны соотношением $c_j(E^*) = (-1)^j c_j(E)$;*

(5) $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \wedge c(E_2)$.

Доказательство. Утверждение (1) сразу следует из определения. Утверждение (2) следует из существования на тривиальном расслоении связности с нулевой матрицей кривизны в некоторой тривиализации. Изоморфизм расслоений порождает изоморфизм между связностями на них. Отсюда сразу следует утверждение (3). Утверждение (4) следует из соотношения $K(\nabla^*, f^*) = -(K(\nabla, f))^{\mathbf{t}}$ для сопряженных связностей сопряженных расслоений (упражнение 10.7). Связности ∇_1 и ∇_2 в расслоениях E_1 и E_2 порождают связность ∇ в расслоении $E_1 \oplus E_2$. Ее матрица кривизны имеет вид $K(\nabla, f) = \begin{pmatrix} K(\nabla_1, f_1) & 0 \\ 0 & K(\nabla_2, f_2) \end{pmatrix}$. Поэтому $c(E_1 \oplus E_2) = \det(I + \frac{i}{2\pi} K(\nabla, f)) = \det(I + \frac{i}{2\pi} K(\nabla_1, f_1)) \det(I + \frac{i}{2\pi} K(\nabla_2, f_2)) = c(E_1) \wedge c(E_2)$ □

Гладкое отображение многообразий $\varphi : X \to Y$ порождает гомоморфизм пучков $\check{\varphi} : \bigwedge^* T^*Y \to \bigwedge^* T^*X$, который, в свою очередь, порождает гомоморфизм когомологий $\widehat{\varphi} : H^*(Y, \mathbb{R}) \to H^*(X, \mathbb{R})$.

Теорема 11.4. $c(\tilde{\varphi}E) = \check{\varphi} c(E)$*, где $\tilde{\pi} : \tilde{\varphi}E \to X$ — обратный образ расслоения $\pi : E \to Y$ при отображении $\varphi : X \to Y$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную связность ∇ в расслоении $\pi : E \to Y$. Отображение $\varphi : X \to Y$ сопоставляет локальной тривиализации $f : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ расслоения $\pi : E \to Y$ локальную тривиализацию $\tilde{f} : \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U} \times \mathbb{C}^r$ расслоения $\tilde{\pi} : \tilde{\varphi}E \to X$, где $\tilde{U} = \varphi^{-1}(U)$. Отображение $\check{\varphi}$ сопоставляет матрице дифференциальных форм $\theta(\nabla, f) \in \mathcal{E}^1_E(U)$ матрицу дифференциальных форм $\tilde{\theta}(\nabla, \tilde{f}) = \check{\varphi}(\theta(\nabla, f)) \in \mathcal{E}^1_{\tilde{\varphi}E}(\tilde{U})$. Прямым вычислением нетрудно проверить, что что при замене тривиализации $\tilde{f}$ эта матрица преобразуется как матрица некоторой связности $\tilde{\nabla}$ в расслоении $\tilde{\pi} : \tilde{\varphi}E \to X$. Таким образом, $K(\tilde{\nabla}, \tilde{f}) = d\theta(\tilde{\nabla}, \tilde{f}) + \theta(\tilde{\nabla}, \tilde{f}) \wedge \theta(\tilde{\nabla}, \tilde{f}) = \check{\varphi}(d\theta(\nabla, f) + \theta(\nabla, f) \wedge \theta(\nabla, f)) = \check{\varphi}(K(\nabla, f))$ и, следовательно, $c(\tilde{\varphi}E) = \check{\varphi}c(E)$. $\square$

Теоремы 11.4 и 8.1 позволяют описать классы Черна другим, совершенно не похожим по виду на предыдущее определение, способом. Сначала нужно дать независимое определение классов Черна для универсального расслоения, что делается относительно несложно. А затем определить классы Черна произвольного расслоения как обратный образ универсального расслоения при подходящем отображении базы расслоения в грассманово многообразие. Классы Черна универсального расслоения можно определить таким образом, чтобы они являлись целочисленными, то есть принадлежали $H^*(Gr, \mathbb{Z})$. Тогда подход через универсальные расслоения позволяет определить целочисленные классы Черна для произвольного расслоения.

Особенно важной характеристикой гладкого многообразия X является полный класс Черна $p(X) \in H^*(X, \mathbb{Z})$ комплексификации его касательного расслоения. Этот класс был предложен - Понтрягиным и называется его именем. Согласно нашим определениям класс Понтрягина зависит не только от топологии многообразия X, но и от структуры гладкого многообразия на нем. И действительно, существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные гладкие многообразия с не совпадающими целочисленными классами Понтрягина. Тем более удивительным является результат С.П.Новикова, утверждающий, что образ класса Понтрягина в группе когомологий с рациональными коэффициентами $H^*(X, \mathbb{Q})$ зависит лишь от топологии многообразия. За этот результат С.П.Новиков первым среди российских математиков был удостоен филдсовской премии.

12. Голоморфные расслоения.

12.1. **Каноническая связность.** Пусть $\pi : E \to X$ — голоморфное векторное расслоение. Оно является $\mathbb{C}$-расслоением. Голоморфная структура наделяет связности и метрики на нем дополнительными свойствами. В частности, связность $\nabla : \mathcal{E}_E \to \mathcal{E}^1_E$ разлагается в сумму $\nabla = \nabla' + \nabla''$, где $\nabla' = \pi_{1,0}\nabla : \mathcal{E}_E \to \mathcal{E}^{1,0}_E$ и $\nabla'' = \pi_{0,1}\nabla : \mathcal{E}_E \to \mathcal{E}^{0,1}_E$.

Пусть $\pi : E \to X$ — эрмитово голоморфное векторное расслоение ранга r. В локальной тривиализации f с голоморфным базисом сечений $e = (e_1, ..., e_r) \subset \mathcal{E}_E(U)$ эрмитова метрика описывается матрицей $h = h(f)$.

Лемма 12.1. *Матрица $\theta = h^{-1}\partial h$, является матрицей связности. Эта связность $\nabla = d + h^{-1}\partial h$ называется канонической.*

Доказательство. Согласно упражнению 10.4, при голоморфной замене базиса сечений $\tilde{e} = eg$ матрица h меняется на $\tilde{h} = \bar{g}^t hg$. Следовательно матрица $\theta = h^{-1}\partial h$ меняется на $\tilde{\theta} = \tilde{h}^{-1}\partial\tilde{h} = (\bar{g}^t hg)^{-1}\partial(\bar{g}^t hg) = (\bar{g}^t hg)^{-1}(\bar{g}^t\partial hg + \bar{g}^t h\partial g) = g^{-1}h^{-1}\partial hg + g^{-1}\partial g = g^{-1}\theta g + g^{-1}\partial g$. Таким образом матрицы θ преобразуются как в упражнении 10.2 и, следовательно, являются матрицами некоторой связности. □

Упражнение 12.1. *Пусть ∇ — каноническая связность эрмитова голоморфного расслоения. Тогда ∇ согласована с эрмитовой метрикой расслоения, $\nabla' = \partial + h(f)^{-1}\partial h(f)$ и $\nabla'' = \bar{\partial}$.*

Лемма 12.2. *Пусть θ и K — матрица и кривизна канонической связности ∇. Тогда $K \in \mathcal{E}^{1,1}_E$, $\partial\theta = -\theta \wedge \theta$, $K = \bar{\partial}\theta$, $\partial K = [K, \theta]$ и $\bar{\partial}K = 0$.*

Доказательство. Из равенства $0 = \partial(hh^{-1}) = \partial hh^{-1} + h\partial h^{-1}$ следует $\partial h^{-1} = -h^{-1}\partial hh^{-1}$. Таким образом, $\partial\theta = \partial(h^{-1}\partial h) = \partial h^{-1} \wedge \partial h =$
$-\,h^{-1}\partial hh^{-1} \wedge \partial h = -h^{-1}\partial h \wedge h^{-1}\partial h = -\theta \wedge \theta$. Следовательно, $K = d\theta + \theta \wedge \theta = \partial\theta + \bar{\partial}\theta - \partial\theta = \bar{\partial}\theta$. Отсюда $\bar{\partial}K = \bar{\partial}^2\theta = 0$ и, ввиду тождества Бьянки, $\partial K = (\partial + \bar{\partial})K = dK = [K, \theta]$. □

Упражнение 12.2. *Найти класс Черна тавтологического и касательного расслоений к сфере Римана $\mathbb{C}P^1$. Доказать, что любое гладкое поле касательных векторов на сфере S^2 обращается в 0 хотя бы в одной точке.*

12.2. **Класс Черна линейного расслоения и оператор Бокштейна.** Изучим более подробно голоморфные линейные расслоения $\pi : E \to X$. Рассмотрим пучок $\mathcal{O}^*$ не обращающихся в 0 голоморфных функций на X, рассматриваемый как группа по умножению и его покрытие Лере $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$.

Теорема 12.1. *Между классами эквивалентности голоморфных линейных расслоений над X и элементами группы $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ существует естественное взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. Очевидным образом модифицируя лемму 8.1, находим, что семейство голоморфных функций $\{g_{\alpha,\beta}\}$ задает линейное голоморфное расслоение над X, если и только если $\{g_{\alpha,\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Аналогично, согласно упражнению 8.2, семейства голоморфных функций $\{g_{\alpha,\beta}\}$ и $\{\tilde{g}_{\alpha,\beta}\}$ задают эквивалентные расслоения, если и только если существует семейство голоморфных функций $\{l_{\alpha,\beta}\} \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ такое, что $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = l_{\alpha,\beta}g_{\alpha,\beta}$. Таким образом, утверждение теоремы 12.1 следует из теоремы Лере. □

Упражнение 12.3. *Из теоремы 12.1 следует, что голоморфные линейные расслоения над X образуют коммутативную группу. Опишите ее в терминах самих расслоений.*

Точная последовательность пучков

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$$

порождает порождает длинную точную последовательность гомологий Чеха.

$$0 \to \check{H}^0(X,\mathbb{Z}) \to \check{H}^0(X,\mathcal{O}) \to \check{H}^0(X,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{b_0} \check{H}^1(XU,\mathbb{Z}) \to \check{H}^1(X,\mathcal{O}) \to$$

$$\check{H}^1(X,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{b_1} \check{H}^2(X,\mathbb{Z}) \to \check{H}^2(X,\mathcal{O})...$$

Сопоставим коциклу $g = \{g_{\alpha,\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}^*)$ коцепь $\tau = \{\tau_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2\pi i}\ln(g_{\alpha,\beta})\} \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{O})$, где $\ln g$ — произвольная ветвь логарифма. Из диаграммы, определяющей длинную точную последовательность

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z}^0(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z}^1(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & (\delta\tau) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z}^3(X) \arrow[d, "i"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp"] & \mathcal{O}^0(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp"] & (\tau) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp"] & (\delta\tau) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp"] & \mathcal{O}^3(X) \arrow[d, "\exp"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^*(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathcal{O}^{*0}(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & (g) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathcal{O}^{*2}(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathcal{O}^{*2}(X) \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Сразу следует

Лемма 12.3. *Образ оператора Бокштейна равен $b_1(g) = \delta\tau$.*

Теорема 12.2. *Первый класс Черна равен $c_1(E) = -b_1(g)$*

Доказательство. Эрмитова метрика на расслоении с коциклом g задается длинами единичных векторов тривиализации. То есть семейством функций $\{h_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}\}$ таким, что $h_\beta = g_{\alpha,\beta}\bar{g}_{\alpha,\beta}h_\alpha$. Положим $\mu = \{\mu_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\partial \ln h_\alpha\} \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}^\infty)$. Тогда $(\delta\mu)_{\alpha,\beta} = \mu_\beta - \mu_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\partial \ln \frac{h_\beta}{h_\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\partial \ln(g_{\alpha,\beta}\bar{g}_{\alpha,\beta}) = \frac{1}{2\pi i}(\partial \ln g_{\alpha,\beta} + \partial \ln \bar{g}_{\alpha,\beta}) =$
$\frac{1}{2\pi i} d \ln g_{\alpha,\beta} = d\tau_{\alpha,\beta}$.

Найдем теперь какая дифференциальная форма отвечает классу чеховких когомологий $\delta\tau$. Для этого используем коммутативную диаграмму из доказательства теоремы 6.1,

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R}(X) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{O}^0(X) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{O}^1(X) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (d\mu) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{O}^3(X) \arrow[d, "\delta"] \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}^0) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (\mu) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (d\mu) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}^3) \arrow[d, "\delta"] \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (\tau) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (d\tau = \delta\mu) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}^2) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}^3) \arrow[d, "\delta"] \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (\delta\tau) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{O}^1) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{O}^2) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{O}^3) \arrow[d, "\delta"] \\
 & {} & {} & {} & {} & {}
\end{tikzcd}
$$

Согласно этой диаграмме коциклу Чеха $\delta\tau$ отвечает дифференциальная форма $d\mu_\alpha = d\frac{1}{2\pi i}\partial \ln h_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\bar{\partial}\partial \ln h_\alpha = -\frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial} \ln h_\alpha$. Но согласно леммам 12.1 и 12.2, $c_1(E) = -\frac{1}{2\pi i}K = -\frac{1}{2\pi i}\bar{\partial}\theta = -\frac{1}{2\pi i}\bar{\partial}(h^{-1}\partial h) = \frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\ln h_\alpha$. Таким образом согласно лемме 12.3 $c_1(E) = -d\mu_\alpha = -\delta\tau = -b_1(g)$. $\square$

Рассмотренная выше конструкция применима и для произвольных $\mathbb{C}$-векторных расслоений, если заменить пучки $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}^*$ на пучки гладких функций $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$. В этом случае, ввиду мягкости пучка $\mathcal{E}$, гомоморфизм Бокштейна устанавливает изоморфизм $H^1(X,\mathcal{E}^*) \to H^2(X,\mathbb{Z})$. Таким образом, линейное $\mathbb{C}$-векторное расслоение с точностью до изоморфизма определяется своим целочисленным (возможно с кручением) классом Черна.

Доказанная теорема позволяет определить первый класс Черна через оператор Бокштейна. С помощью этого описания и свойств классов Черна (теорема 11.3) можно определить и остальные классы Черна.

Другое описание голоморфных линейных расслоений дается с помощью дивизоров. Рассмотрим пучок $\mathcal{M}$ мероморфных функций на комплексном многообразии X, рассмотренный как группа по умножению. Пучок $\mathcal{D} = \mathcal{M}/\mathcal{O}^*$ называется *пучком дивизоров*, а его сечения D *дивизорами* на X.

Слой $\mathcal{M}_x$ состоит из классов эквивалентности мероморфных функций $\frac{f_1}{f_2}$. Если в некоторой окрестности $f_1, f_2 \neq 0$, то — это класс эквивалентности голоморфной функции. Поэтому в достаточно маленькой окрестности точки x дивизор D равен 0 вне множества нулей некоторой голоморфной функции $f_1 f_2$.

Таким образом, дивизор выделяет некоторое (возможно особое) комплексное подмногообразие в $X(D) \subset X$ коразмерности 2, компоненты которого имеют целочисленные кратности (степени нулей/полюсов функций f_1/f_2).

Из точности последовательности пучков $0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M} \to \mathcal{D} \to 0$ следует, что для дивизора $D \in H^0(X,\mathcal{D})$ существует покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ и мероморфные функции $f_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$, нули и полюса, которых расположены на $X(D)$, имеют ту же кратность, что и D, причем $g_{\alpha,\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \bigcap U_\beta)$. В частности, $g_{\alpha,\beta}g_{\beta,\gamma}g_{\gamma,\alpha} = 1$

на $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$. Таким образом, дивизор D порождает линейное расслоение E с коциклом $\{g_{\alpha,\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$.

Это соответствие можно описать с помощью индуцированной точной последовательностью гомологий $H^0(X, \mathcal{M}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Из нее видно, что дивизоры описывают эквивалентные расслоения, если и только, если они получаются друг из друга умножением на глобальную мероморфную функцию. Такие дивизоры называются *линейно эквивалентными*.

Обратное соответствие строится по мероморфному сечению s расслоения E. Ему отвечает дивизор $D(s)$, состоящий из взятых с кратностями компонент множества нулей и полюсов сечения.

Можно доказать, что первый класс Черна голоморфного линейного расслоения E над компактным многообразием двойственнен отвечающему расслоению дивизору D в следующем смысле. Дивизор $D \subset X$ порождает гомологический класс $e \in H_{2n-2}(X, \mathbb{C})$ такой что $\int_e \omega = \int_X c_1(E) \wedge \omega$ для любой дифференциальной формы $\omega \in H^{2n-2}(X, \mathbb{C})$.

Аналогичная интерпретация существует и для остальных классов Черна.