В. В. Лосяков, А. К. Погребков, С. М. Хорошкин

Математические методы естественных наук

Дополнительные главы прикладных методов анализа

Высшая школа экономики
1-й семестр 2014/2015 гг.

Содержание

1. Лекция 1. Асимптотические методы

1.1. **Постановка задачи.** Рассмотрим несобственный интеграл $G(x) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ как функцию параметра x. Заменяя под знаком интеграла $(1+t)^{-1}$ на соответствующий ряд Тэйлора, приходим к выражению

$$G(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \int_0^\infty e^{-xt}t^n dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \int_0^\infty e^{-xt}\frac{(xt)^n}{x^{n+1}}d(xt) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} =$$
$$= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Получили ряд, расходящийся при любом x, отличном от нуля, что говорит о неправомерности приведенных рассуждений. Этого можно было ожидать, поскольку используемое разложение имеет место не на всем промежутке интегрирования. Повторим те же вычисления с конечной частью ряда Тэйлора функции $(1+t)^{-1}$. По формуле суммы геометрической прогресии

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t},$$

поэтому

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^\infty e^{-tx}t^k dt + (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} + (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}dt$$

Последнее слагаемое

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}dt$$

представляет собой ошибку приближения функции $G(x)$ конечным рядом $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$. Нетрудно видеть, что при $\operatorname{Re} x = a > 0$

$$|R_n(x)| < \int_0^\infty t^n e^{-at}dt = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

В частности, если x – действительное положительное число, что мы и предположим далее для простоты изложения, то $|R_n(x)| < \frac{n!}{x^{n+1}}$ и этот остаток имеет знак $(-1)^n$.

Изучим поведение ошибки в зависимости от n и x.

а) Фиксируем n. Тогда с ростом x остаток $R_n(x)$ стремится к нулю.

б) Фиксируем x. Ошибка уменьшается с ростом n, пока n не превосходит целой части $[x]$ числа x. Затем ошибка $R_n(x)$ начинает расти. В самом деле, $\frac{n!}{x^{n+1}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}\cdots\frac{n}{x}$, и при $n > x$ каждый множитель, начиная с $[x]+1$-го, больше единицы.

Таким образом, любое численное приближение интеграла имеет ошибку, не меньшую $\varepsilon(x) = \frac{[x]!}{x^{[x]}}$. Она весьма мала при больших x. Например, при $x = 10$ ошибка $\varepsilon \sim 10^{-3}$, а при $x = 100$ ошибка $\varepsilon \sim 10^{-40}$, что говорит о том, что приближения получаются очень хорошими, несмотря на неустранимые ошибки.

Приведенный способ вычислений был аксиоматизирован А.Пуанкаре в 1890 г.

1.2. **Подход Пуанкаре.** *Определение*. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in \bar{D}$ - предельная точка D. Последовательность функций $\varphi_n(z)$, $n \geq 1$, $z \in D$ называется асимптотической последовательностью при $z \to z_0$ в D, если все $\varphi_n(z)$ определены в D и для всякого $n \geq 1$ $\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z))$ при $z \to z_0$.

Пусть $\{\varphi_n(z)\}$ - асимптотическая последовательность. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(z)$ называется асимптотическим разложением функции $f(z)$ при $z \to z_0$ в D, $f(z) \sim \sum\limits_{n\geq 1} a_n\varphi_n(z)$, если для всякого

$n \geq 1$ выполнено соотношение

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(z) = o(\varphi_n(z)), \quad z \to z_0, \quad z \in D.$$

Напомним символику бесконечно малых.

1. $f(z) \sim g(z)$ при $z \to z_0$, $z \in D$ означает, что $\lim\limits_{z \to z_0, z \in D} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 1$.

2. $f(z) = o(g(z))$ при $z \to z_0$, $z \in D$ означает, что $\lim\limits_{z \to z_0, z \in D} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 0$.

3. $f(z) = O(g(z))$ при $z \to z_0$, $z \in D$ означает, что $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ ограничено в пересечении некоторой окрестности z_0 с D.

Например, функция $\operatorname{th} z$ есть $o(1)$ при $z \to \infty$, $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2} - \delta$. В самом деле,

$$\operatorname{th} z = \frac{1 - e^{-2z}}{1 + e^{-2z}}$$

и при $|z| > R$ с учетом $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2} - \delta$ верно неравенство $\operatorname{Re} z > |z| / \sin \delta$. Поэтому при стремлении z к бесконечности в указанной области $\operatorname{Re} z$ также стремится к бесконечности; соответственно, $|e^{-z}|$ стремится к нулю.

Однако, это не так в области $\operatorname{Re} z > 0$, поскольку в этом случае при стремлении z к бесконечности $\operatorname{Re} z$ может сколь угодно мало отличаться от нуля, так что $|e^{-z}|$ к нулю не стремится.

Наиболее часто используются степенные асимптотические последовательности, например, $\varphi_n(z) = z^n$ при $z_0 = 0$ или $\varphi_n(z) = z^{-n}$ при $z_0 = \infty$. Если функция $f(z)$ имеет асимптотическое разложение по заданной системе функций, то его коэффициенты единственны. В самом деле, из определения имеем при $z \to z_0$, $z \in D$

$$f(z) - a_1 \varphi_1(z) = o(\varphi_1(z)), \qquad \text{откуда} \quad a_1 = \lim_{z \to z_0,\, z \in D} \frac{f(z)}{\varphi_1(z)},$$

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(z) = o(\varphi_n(z)), \qquad \text{откуда} \quad a_n = \lim_{z \to z_0,\, z \in D} \frac{f(z) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(z)}{\varphi_n(z)}$$

Можно также заметить, что при наличии асимптотического разложения выполнена более точная оценка ошибки:

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(z) = O(\varphi_{n+1}(z))$$

при $z \to z_0$ и $z \in D$, что можно использовать как другой вариант определения.

С другой стороны, функция не определяется своим асимптотическим разложением; различные функции могут иметь одно и тоже асимптотическое разложение. Например, функция $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ имеет нулевое асимптотическое разложение в нуле по степеням z,

$$e^{-\frac{1}{z^2}} \sim 0 + 0 \cdot z + ... + 0 \cdot z^n + ... \qquad z \to 0$$

поскольку убывает при $z \to 0$ быстрее любой степени z.

Формула Тэйлора с остаточным членом в форме Пеано,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + o(z^{n+1})$$

говорит, что всякая функция, бесконечно дифференциируемая в нуле, имеет свой ряд Тэйлора в качестве асимптотического разложения (вне зависимости от его сходимости). Однако, понятие асимптотического разложения шире формулы Тэйлора: во-первых, можно брать иные асимптотические последовательности, например,

$$\varphi_1(z) = z^{-2}, \varphi_2(z) = z^{-1}, \ldots, \varphi_n(z) = z^{n-3}, ..., \qquad z_0 = 0.$$

Тогда фунции, допускающие асимптотическое разложение по этой системе, могут стремиться к ∞ при $z \to 0$ и тем самым не иметь никаких производных в нуле. Во-вторых, как правило, асимптотические разложения рассматриваются в секторах или полуплоскостях типа $\operatorname{Re} z > 0$ и не контролируют поведение функции вне этих секторов.

1.3. **Приближенное нахождение нулей трансцендентных уравнений.** *Пример.* Трансцендентное уравнение $x \sin x = 1$ имеет бесконечно много корней. При больших x n-ный корень ведет себя как $x = \pi n + o(1)$. Уточним его поведение. Положим $x = \pi n + \alpha_n$, где $\alpha_n = o(1)$ и подставим это выражение в соотношение $\sin x = x^{-1}$. Пользуясь рядами Тейлора для функций $\sin x$ и $(1+x)^{-1}$, получаем:

$$\sin x = (-1)^n\left(\alpha_n + o(\alpha_n)\right) = \frac{1}{\pi n + \alpha_n} = \frac{1}{\pi n\left(1 + \alpha_n/\pi n\right)} = \frac{1}{\pi n}\left(1 - \frac{\alpha_n}{\pi n} + o\left(\frac{\alpha_n}{\pi n}\right)\right).$$

Правая часть имеет вид

$$\frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

поэтому, глядя на левую часть, заключаем, что $\alpha_n = (-1)^n/(\pi n) + \beta_n$, где $\beta_n = o(1/n)$. Подставим вновь полученное выражение в предыдущее равенство, воспользовавшись следующим членом в ряде Тэйлора для синуса, получим

$$(-1)^n\left((-1)^n\frac{1}{\pi n} - (-1)^n\frac{1}{6(\pi n)^3} + \beta_n + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{\pi n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

откуда получаем, что $\beta_n = -\dfrac{1}{6(\pi n)^3} - \dfrac{(-1)^n}{(\pi n)^3} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, так что

$$x = \pi n + (-1)^n\frac{1}{\pi n} - \frac{1}{6(\pi n)^3} - \frac{(-1)^n}{(\pi n)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Итерируя процесс, можем получить полное асимптотичское разложение корня по n.

1.4. **Оценка интеграла интегрированием по частям.** Другой пример асимптотического разложения предоставляет оценка интеграла интегрированием по частям. Рассмотрим, например, интеграл Френеля $F(x) = \int\limits_x^\infty \cos u^2 du$ как функцию нижнего предела. Сделаем замену переменных и проинтегрируем по частям:

$$F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{x^2}^\infty t^{-1/2}\cos t dt = \frac{1}{2}\int\limits_{x^2}^\infty t^{-1/2} d\sin t = \frac{1}{2}t^{-1/2}\sin t\Big|_{x^2}^\infty + \frac{1}{4}\int\limits_{x^2}^\infty t^{-3/2}\sin t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x^2}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_{x^2}^\infty t^{-3/2} d\cos t\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x^2}{x} - \frac{1}{2}\frac{\cos x^2}{x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\int\limits_{x^2}^\infty t^{-5/2}\cos t dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x^2}{x} - \frac{1}{2}\frac{\cos x^2}{x^3} + \ldots + \frac{(-1)^n(4n-1)!!}{2^{2n}}\frac{\sin x^2}{x^{4n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)!!}{2^{2n+1}}\frac{\cos x^2}{x^{4n+3}} + R_n\right),$$

где $R_n = \dfrac{(-1)^n(4n+5)!!}{2^{2n+2}}\displaystyle\int\limits_{x^2}^\infty t^{-\left(2n+\frac{5}{2}\right)}\cos t dt$. Оценим последний интеграл, заменив $\cos t$ на 1:

$$\left|\int\limits_{x^2}^\infty t^{-\left(2n+\frac{5}{2}\right)}\cos t dt\right| < \int\limits_{x^2}^\infty t^{-\left(2n+\frac{5}{2}\right)} dt = \frac{2}{4n+3}\frac{1}{x^{4n+3}}.$$

В этой оценке остаток имеет порядок последнего слагаемого рассмотренного пртближения интеграла Френеля $F(x)$. Объединив теперь R_n с этим последним слагаемым, получим оценку

$$F(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x^2}{x} - \frac{1}{2}\frac{\cos x^2}{x^3} + \ldots + \frac{(-1)^n(4n-1)!!}{2^{2n}}\frac{\sin x^2}{x^{4n+1}}\right) + O\left(\frac{1}{x^{4n+3}}\right),$$

которая означает, что при $x \to +\infty$ функция $F(x)$ допускает асимптотическое разложение вида

$$F(x) \sim \sin x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-4n-1}\right) + \cos x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-4n-3}\right),$$

которое обычно записывают в виде

$$F(x) \sim -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{-2n-1} \sin\left(x^2 - n\frac{\pi}{2}\right).$$

2. Лекция 2. Интегралы Лапласа

2.1. **Вариации определения Пуанкаре.** На прошлой лекции рассматривалось асимптотическое разложение интеграла Френеля $F(x) = \int\limits_x^\infty \cos u^2 du$ по системе функций

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x^{2n+1}}, & n = 2k, \\ \dfrac{\cos x^2}{x^{2n+1}}, & n = 2k+1 \end{cases}, \quad n \geq 0,\ x \to +\infty$$

Формально система функций $f_n(x)$ не является асимптотической последовательностью при $x \to +\infty$ в смысле Пуанкаре, поскольку отношение $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ равно либо $x^{-2}\operatorname{tg} x^2$, либо $x^{-2}\operatorname{ctg} x^2$ в зависимости от четности n и не имеет за счет тригонометрических множителей предела при $x \to +\infty$. Однако, разложение дает хорошую степенную оценку остатка порядка x^{-2n-2} и вполне может быть использовано для приближенных вычислений и асимптотичекого анализа. Для работы с такими разложениями определение Пуакаре можно модифицировать двумя способами (и оба они используются!).

1-ый способ. Разрешим переменные коэффициенты асимптотического разложения, наложив лишь условие их ограниченности в окрестности предельной точки. Иными словами, для асимптотической последовательности $f_n(x)$, $x \to x_0$, $x \in D$, будем рассматривать приближения вида

$$f(x) = a_1(x)f_1(x) + \cdots + a_n(x)f_n(x) + o(f_n(x)),$$

где каждый коэффициент $a_k(x)$ ограничен в некоторой окрестности точки x_0. В нашем примере $x_0 = +\infty$, $D = \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = x^{-2n-1}$, $a_n(x)$ есть линейная комбинация $\cos x^2$ и $\sin x^2$. Соответствующий смысл вкладывается и в асимптотическое разложение

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) f_k(x), \qquad , x \to x_0,\ x \in D.$$

2-ой способ. Можно допустить составные асимптотические разложения (с постоянными коэффициентами) вида

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k g_k(x), \qquad , x \to x_0,\ x \in D,$$

где $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ – разные асимптотические последовательности. В нашем примере

$$f_n(x) = \frac{\sin x^2}{x^n}, \qquad g_n(x) = \frac{\cos x^2}{x^n}.$$

Этот подход, помимо прочего, позволяет увеличивать область применимости асимптотического разложения.

2.2. **Асимптотика интеграла Лапласа.** Пусть $f(t)$ – функция действительного аргумента $t > 0$ такая, что интеграл

$$F(x) = \int_0^\infty f(t) e^{-xt} dt \tag{2.1}$$

(преобразование Лапласа функции $f(t)$) абсолютно сходится при больших действительных $x > 0$. Для этого достаточно потребовать, например, существования конечного интеграла $\int_0^\infty |f(t)| e^{-x_0 t} dt = M$ для некоторого $x_0 > 0$.

Все асимптотические свойства интеграла Лапласа (2.1) основаны на следующей оценке:

Лемма Ватсона. Пусть функция $f(t)$ такова, что

а) интеграл $\int_0^\infty |f(t)| e^{-x_0 t} dt = M$ конечен для некоторого $x_0 > 0$;
б) $f(t) = O(t^a)$ при $t \to 0$ для некоторого $a > -1$.

Тогда $\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = O\left(\frac{1}{x^{a+1}}\right)$ при $x \to \infty$, $\operatorname{Re} x > 0$ (более точно: если x стремится к бесконечности, оставаясь внутри некоторого сектора $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$).

Доказательство. Разобьем интеграл на две части:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = \int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt}dt + \int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-xt}dt,$$

где ε - произвольное малое положительное число. Оценим вначале второй интеграл при $\operatorname{Re} x > x_0$:

$$\left|\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-xt}dt\right| = \left|\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-x_0t}e^{-(x-x_0)t}dt\right| < M|e^{-(x-x_0)\varepsilon}| = Me^{-\operatorname{Re}(x-x_0)\varepsilon} = \widetilde{M}e^{-\varepsilon \operatorname{Re} x},$$

где $\widetilde{M} = Me^{-\operatorname{Re} x_0}$. Если x стремится к бесконечности внутри указанного сектора, то при фиксированном ε интеграл $e^{-\varepsilon \operatorname{Re} x}$ стремится к нулю быстрее любой степени x, т.е., $\int_\varepsilon^\infty f(t)e^{-xt}dt = o(x^{-n})$ для всех n.

В первом интеграле для достаточно малого ε мы можем воспользоваться оценкой $|f(t)| < Ct^a$ для некоторого $C > 0$, так что

$$\left|\int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt}dt\right| < C\int_0^\varepsilon t^a e^{-\sigma t}dt,$$

где $\sigma = \operatorname{Re} x$. Увеличим в последнем интеграле интервал интегрирования до бесконечного

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\varepsilon f(t)e^{-xt}dt\right| &< C\int_0^\infty t^a e^{-\sigma t}dt = \frac{C}{\sigma^{a+1}}\int_0^\infty (\sigma t)^a e^{-\sigma t}d\sigma t = C\frac{\Gamma(a+1)}{\sigma^{a+1}} \\ &= O\left(\frac{1}{\sigma^{a+1}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{a+1}}\right),\end{aligned}$$

если $x \to \infty$, оставаясь в секторе $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$.

Из леммы Ватсона следует, что если функция $f(t)$ такова, что $|f(t)| < e^{x_0t}$ при больших t и $f(t) = a_1t^{\alpha_1} + \cdots a_nt^{\alpha_n} + O(t^{\alpha_{n+1}})$ при $t \to 0$ и некоторых $a_1, ..., a_n$ и вещественных $\alpha_1, ...\alpha_{n+1}$, таких, что $-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{n+1}$, то

$$\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt = a_1\frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{x^{\alpha_1+1}} + \cdots + a_n\frac{\Gamma(\alpha_n+1)}{x^{\alpha_n+1}} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha_{n+1}+1}}\right).$$

Например, для функции $f(t)$, растущей на бесконечности не быстрее некоторой экспоненты и имеющей в нуле асимптотическое разложение

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^\infty a_kt^k, \qquad t \to 0,$$

ее преобразование Лапласа $F(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt$ имеет асимптотическое разложение в описанном выше секторе

$$F(x) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{k!a_k}{x^{k+1}}, \qquad x \to \infty.$$

Заметим, что все рассуждения и результаты остаются верными и для всякого конечного интеграла $\int_0^b f(t)e^{-xt}dt$ – бесконечный отрезок интегрирования, отделенный от нуля, каждый раз дает экспоненциально малый вклад.

Подобным же образом оцениваются интегралы вида

$$I(x) = \int_0^\infty g(t)e^{x\varphi(t)}dt,$$

где $\varphi(t)$ - монотонно убывающая от 0 к $-\infty$ вещественнозначная функция. А именно, сделаем в интеграле замену переменных $t = -\psi(\tau)$, где $t = \psi(\tau)$ – функция, обратная к $\tau = \varphi(t)$:

$$I(x) = \int_0^\infty g(\psi(\tau))e^{-x\tau}d(-\psi(\tau)) = -\int_0^\infty g(\psi(\tau))\psi'(\tau)e^{-x\tau}d\tau.$$

Таким образом, задача сводится к оценке интеграла Лапласа $I(x) = -\int_0^\infty f(\tau)e^{-x\tau}d\tau$, где $f(\tau) = g(\psi(\tau))\frac{d\psi(\tau))}{d\tau}$. Если обе функции $g(t)$ и $\varphi(t)$ имеют асимптотические разложения в нуле,

$$\varphi(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k, \qquad g(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \qquad t \to 0,$$

то и функция $f(\tau)$ имеет асимптотическое разложение в нуле $f(\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^k$, коэффициенты которого находятся реккурентно (для этого фактически требуется обращение первого ряда):

$$c_0 = b_0 a_1^{-1},\ c_1 = b_1 a_1^{-2} - 2a_2 b_0 a_1^{-4},\ \ldots$$

и определяют коэффициенты асимптотического разложения интеграла $I(x)$. Как и раньше, те же оценки верны и для интеграла с конечным верхним пределом.

2.3. **Интегралы гауссова типа.** Пусть $f(t)$ - функция такая, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-xt^2}dt$ абсолютно сходится при больших x. Преобразование

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-xt^2}dt = \int_0^{+\infty} (f(t) + f(-t))e^{-xt^2}dt$$

и последующая замена переменных $t = \sqrt{\tau}$ также сводят этот интеграл к интегралу Лапласа

$$\int_0^{+\infty} (f(\sqrt{\tau}) + f(-\sqrt{\tau}))e^{-x\tau}\frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}}$$

Таким образом, если функция $f(t)$ имеет в нуле асимптотическую оценку

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n} a_k t^k + O(t^{2n+1}),$$

то подинтегральная функция в последнем интеграле оценивается как

$$\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{2}(f(\tau^{\frac{1}{2}}) + f(-\tau^{\frac{1}{2}})) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}\tau^{k-\frac{1}{2}} + O\left(\tau^{n+\frac{1}{2}}\right),$$

так что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-xt^2}dt = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{x^{k+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{x^{k+\frac{3}{2}}}\right).$$

Как и раньше, эта же оценка верна для интеграла по любому интервалу, содержащему 0.

2.4. **Метод перевала. Вещественная версия.** Метод перевала в простейшей версии описывает асимптотическое вычисление интеграла $I(x) = \int_a^b g(t)e^{x\varphi(t)}dt$, где $\varphi(t)$ имеет единственный максимум во внутренней точке $t_0 \in (a, b)$. Имеем

$$\int_a^b g(t)e^{x\varphi(t)}dt = \int_a^b g(t)e^{x\varphi(t_0)+x(\varphi(t)-\varphi(t_0))}dt = e^{x\varphi(t_0)}\int_a^b g(t)e^{x(\varphi(t)-\varphi(t_0))}dt.$$

Сделаем замену переменных $t = \psi(\tau)$, обращающую соотношение $\varphi(t) - \varphi(t_0) = -\tau^2$:

$$\int_a^b g(t)e^{x\varphi(t)}dt = \int_{\psi(\tau)=a}^{\psi(\tau)=b} f(\tau)e^{-x\tau^2}d\tau,$$

где $f(\tau) = g(\psi(\tau))\psi'(\tau)$. Следовательно, интеграл $I(x)$ имеет асимптотическое разложение при $x \to +\infty$:

$$\int_a^b g(t)e^{x\varphi(t)}dt \sim e^{x\varphi(t_0)}\left(\sum_{k\geq 0}^{n} c_{2k}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{x^{n+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{x^{n+\frac{3}{2}}}\right)\right),$$

где c_n - коэффициенты асимптотического разложения $f(\tau)$ в нуле, вычисляемые реккурентно по коэффициентам асимпотических разложений $g(t)$ и $\varphi(t)$ в окрестности точки $t = t_0$. Для этого в первую очередь следует найти разложение функции $\psi(\tau) = d_0 + d_1\tau + \cdots + d_n\tau^n + o(\tau^n)$ в окрестности точки $\tau = 0$:

$$\frac{\varphi''(t_0)}{2}(\psi(\tau) - t_0)^2 + \frac{\varphi'''(t_0)}{2}(\psi(\tau) - t_0)^3 + \cdots = -\tau^2,$$

так что

$$\psi(\tau) = t_0 + \sqrt{\frac{-2}{\varphi''(t_0)}}\tau + \frac{2\varphi'''(t_0)}{3\varphi''(t_0)^2}\tau^2 + \cdots .$$

В частности, $c_0 = g(\psi(0))\psi'(0) = \sqrt{\frac{2}{-\varphi''(t_0)}}g(t_0)$.

Можно также заметить, что все аргументы работают и для комплекснозначной функции $\varphi(t)$ с единственной критической точкой $t = t_0$ внутри интервала, в которой $\varphi'(t_0) = 0$ и действительная часть $\varphi(t_0)$ имеет локальный максимум (за исключением знака перед τ^2 в соотношении $\varphi(t) - \varphi(t_0) = \tau^2$). В этом случае асимптотическое разложение имеет место при $x \to \infty$ и $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$. Коэффициент $c_0 = g(\psi(0))\psi'(0) = \sqrt{\frac{2}{\varphi''(t_0)}}g(t_0)$.

2.5. **Формула Стирлинга.** Для исследования асимптотики $\Gamma(x)$ при больших положительных x чуть более удобно представить $\Gamma(x)$ в виде

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^x d\tau = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\tau + x\ln\tau} d\tau.$$

Подинтегральная функция обращается в ноль на концах интервала интегрирования и имеет максимум в точке $\tau = x$, где $(-\tau + x\ln\tau)' = -1 + x/\tau = 0$. Сдвинем точку макимума в 0 заменой переменных $\tau = (t+1)x$. Получим

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x-tx+x\ln(t+1)x} x dt = x^x e^{-x}\int_{-1}^\infty e^{x(-t+\ln(t+1))} dt,$$

так что

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \int_{-1}^\infty e^{xp(t)} dt, \qquad p(t) = -t + \ln(t+1)$$

где функция $p(t)$ имеет единственный экстремум с максимумом действительной части в точке 0. К этому интегралу применим метод перевала:

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \int_{-\infty}^\infty e^{-x\tau^2}\psi'(\tau) d\tau,$$

где $t = \psi(\tau)$ есть решение уравнения $t - \ln(t+1) = \tau^2$. Для нахождения асимтотического разложения этого интеграла необходимо найти асимптотическое разложение функции $t = \psi(\tau)$ в нуле. Пусть $t = \psi(\tau) = a_1\tau + a_2\tau^2 + ... + a_n\tau^n + O(\tau^{n+1})$. Найдем первые члены разложения:

$$t - \ln(1+t) = t - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + O(t^4) = \frac{1}{2}(a_1\tau + a_2\tau^2 + O(\tau^3))^2 - \frac{1}{3}(a_1\tau + O(\tau^2))^3 = \tau,$$

откуда $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$. Аналогично $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{18}$. Отсюда $\psi'(\tau) = \sqrt{2} + \frac{4}{3}\tau + \sqrt{2}6\tau^2 + O(\tau^3)$. Итак, при $x \to \infty$ и $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{\pi}{2} - \delta$

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}} = \sum_{k=0}^n c_{2k}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{x^{k+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{x^{n+1+\frac{1}{2}}}\right),$$

где $c_0 = \sqrt{2}$, $c_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}$, т.е.,

$$\Gamma(x) = x^x e^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Общая формула коэффициентов асимптотического разложения $\Gamma(x)$ неизвестна.

Литература к лекциям 1-2: А.Эрдейи, Асимптотические разложения, Главы 1-2,
Ф.Олвер, Асимптотика и специальные функции, Главы 1,3.,
М.В.Федорюк, Метод перевала.

3. Лекция 3. Асимптотики интегралов Фурье

3.1. **Осциллирующие интегралы.** Мы рассматриваем теперь интегралы вида

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{ixt}\varphi(t).$$

Здесь, в отличие от интегралов Лапласа, другая причина убывания на бесконечности – осцилляции, т.е. условная сходимость. Основной здесь является следующая лемма.
Лемма Римана–Лебега. Рассмотрим интеграл

$$F(x)=\int\limits_{a}^{b} dt\, e^{ixt}\varphi(t),$$

где a и b конечны, или бесконечны. Пусть

а) $\varphi(t)$ кусочно непрерывная

б) в случае несобственного интеграла $F(x)$ сходится равномерно по x (например $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема)

Тогда $F(x)=o(1)$ при $|x|\to\infty$, т.е. $\lim_{|x|\to\infty}F(x)=0$.

Доказательство проведем для случая конечного интервала. Тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$ и для любого ϵ существует разбиение $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$, такое что $|\varphi(t)-\varphi(t_m)|<\epsilon$ внутри каждого отрезка разбиения. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt\, e^{ixt}\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt\, e^{ixt}\varphi(t_k)+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt\, e^{ixt}[\varphi(t)-\varphi(t_{t_k})]}_{<(b-a)\epsilon}<$$

$$<\sum_{k=1}^{n}\varphi(t_k)\frac{e^{ixt_k}-e^{-ixt_{k-1}}}{ix}+(b-a)\epsilon<\frac{Mn}{|x|}+(b-a)\epsilon,$$

так что оба члена могут быть сделаны сколь угодно малыми при больших $|x|$. ■
Замечание. Интеграл $\int_0^\infty dt\, t^{-\sigma}e^{itx}$, $-1<\sigma<0$, сходится по t не абсолютно, но равномерно по x при $|x|\to\infty$, так что лемма Римана–Лебега к нему применима.
Следствие 1. Пусть $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема n раз. Тогда

$$F(x)=e^{ibx}\left(\frac{\varphi(b)}{ix}-\frac{\varphi'(b)}{(ix)^2}+\frac{\varphi''(b)}{(ix)^3}-\dots+(-1)^n\frac{\varphi^{(n-1)}(b)}{(ix)^n}\right)-$$
$$-e^{iax}\left(\frac{\varphi(a)}{ix}-\frac{\varphi'(a)}{(ix)^2}+\frac{\varphi''(a)}{(ix)^3}-\dots+(-1)^n\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(ix)^n}\right)+o(x^{-n})$$

Доказательство проводится интегрированием по частям.

$$F(x)=\int\limits_a^b dt\, e^{ixt}\varphi(t)=\frac{e^{ixt}\varphi(t)}{ix}\bigg|_{t=a}^{b}-\int\limits_a^b dt\, e^{ixt}\frac{\varphi'(t)}{ix},$$

где последний член имеет порядок x^{-1} в силу леммы. И так далее.
Следствие 2. Пусть $a=0$, $b=\infty$, $\varphi\in\mathscr{S}$ (впрочем, достаточно простого убывания вместе со всеми производными). Тогда

$$F(x)=\int\limits_0^\infty dt\, e^{ixt}\varphi(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^{(k)}(0)\left(\frac{i}{x}\right)^{k+1},\quad |x|\to\infty.$$

Сравним с интегралом Лапласа:

$$F(z) = \int\limits_0^\infty dt\, e^{-zt}\varphi(t) \sim \sum_{k=0}^\infty \varphi^{(k)}(0)\left(\frac{1}{z}\right)^{k+1}$$

где $z \to \infty$ так, что $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2} - \delta$. Подставляя $z = -ix = \dfrac{x}{i}$, видим, что асимптотическое разложение интеграла Фурье для быстроубывающих функций является аналитическим продолжением асимптотического разложения соответствующего интеграла Лапласа на область $|\arg z| \le \frac{\pi}{2}$.

Пример.

$$\int\limits_0^\infty dt\, \frac{e^{itx}}{1+t} \sim (-1)^n n! \left(\frac{i}{x}\right)^{n+1}, \quad |x| \to \infty,$$

$$\int\limits_0^\infty dt\, \frac{e^{-tz}}{1+t} \sim (-1)^n n! \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}, \quad |\arg z| \le \frac{\pi}{2} \to \infty,$$

На самом деле асимптотическое разложение работает даже в области $|\arg z| < \pi - \delta$

Вопрос. Асимптотика интеграла Лапласа возможна и по нецелым степеням. Как обобщить на интеграл Фурье?

Ответ. Обобщается для убывающих функций. В преобразовании Лапласа для этого нужно было, в частности, вычислить

$$\int\limits_0^\infty dt\, t^\alpha e^{-pt} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1,$$

а здесь нам нужен интеграл

$$\int\limits_0^\infty dt\, t^\alpha e^{itx} = e^{i\pi(\alpha+1)/2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}, \quad -1 < \alpha < 0,$$

чтобы обеспечить сходимость на бесконечности. Доказательство:

$$\int\limits_0^\infty dt\, t^\alpha e^{-tx} = \int\limits_0^{i\infty} dt\, t^\alpha e^{-tx} =$$

где мы воспользовались тем, что в первом квадранте вклад по четверти большого круга дает в пределе ноль. Таким образом во втором интеграле t – чисто мнимо и $0 < t < i\infty$, точнее $0 < it < \infty$. Тогда

$$= \int\limits_0^\infty \frac{d(-it)}{-i}\,(-it)^\alpha e^{itx} = e^{-i\pi(\alpha+1)/2}\int\limits_0^\infty dt\, e^{ixt} t^\alpha.$$

Проблема в том, что мы умеем только интегрировать по частям осциллирующе интегралы, и не умеем отщеплять, как в интеграле Лапласа, стандартные интегралы - они расходятся на бесконечности. Выход в использовании интегрировании по частям с интегрально заданными функциями, благо от них потребуются только граничные значения.

Например, пусть $-1 < \alpha < 0$ и

$$F(x) = \int\limits_0^\infty dt\, \underbrace{t^\alpha e^{itx}}_{\psi'(t)}\varphi(t) = \psi(t)\varphi(t)\big|_0^\infty - \int_0^\infty dt\, \psi(t)\varphi'(t),$$

где мы обозначили

$$\psi(t) = \int_{\infty}^{t} d\tau\, \tau^{\alpha} e^{ix\tau}.$$

Тогда

$$\psi(0) = -\int_{0}^{\infty} d\tau\, \tau^{\alpha} e^{ix\tau} = -e^{i\pi(\alpha+1)/2} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}},$$

так что

$$\psi(t) \sim \frac{t^{\alpha} e^{itx}}{ix} \quad \text{при } t \to +\infty.$$

(оценка интеграла $\int_{\infty}^{t} d\tau\, \tau^{\alpha} e^{ix\tau}$ по частям). Следовательно,

$$F(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1) e^{i\pi(\alpha+1)/2}}{x^{\alpha+1}} - \int_{0}^{\infty} dt\, \psi(t) \varphi'(t),$$

где $\psi(t)$ обладает указанной выше асимптотикой при $t \sim \infty$. Можно повторить вычисления, взяв $\psi^{(2)}(t) = \int_{\infty}^{t} d\tau\, \psi(\tau)$. Потребуется вычислить интеграл $\int_{\infty}^{0} d\tau\, \psi^{(2)}$, что аналогично предыдущему дает $\dfrac{\Gamma(\alpha+2)}{x^{\alpha+2}} e^{i\pi(\alpha+2)/2}$. Итак,

$$\begin{aligned} F(x) &\sim e^{i\pi(\alpha+1)/2} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}} a_1 + e^{i\pi(\alpha+2)/2} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{x^{\alpha+2}} a_2 + \ldots = \\ &= \Gamma(\alpha+1) \left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha+1} a_1 + \Gamma(\alpha+2) \left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha+2} a_2 + \ldots, \quad t \to 0, \end{aligned}$$

где асимптотически $\varphi(t) \sim a_1 + a_2 t + \ldots + a_{n+1} t^n$, $t \to 0$. Отсюда получаем, что при наличии бесконечной дифференцируемости и равомерной сходимости интегралов от производных

$$\begin{aligned} \int_{a}^{b} dt\, e^{itx} \varphi(t) &\sim e^{iax} \left(a_1 \Gamma(\alpha_1+1) \left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha_1+1} + a_2 \Gamma(\alpha_2+1) \left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha_2+1} + \ldots \right) - \\ &- \sim e^{ibx} \left(b_1 \Gamma(\beta_1+1) \left(\frac{i}{x}\right)^{\beta_1+1} + a_2 \Gamma(\beta_2+1) \left(\frac{i}{x}\right)^{\beta_2+1} + \ldots \right), \end{aligned}$$

если имеют место асимптотические разложения

$$\begin{aligned} &\text{при } t \to a: \quad \varphi(t) \sim a_1 (t-a)^{\alpha_1} + a_2 (t-a)^{\alpha_2} + \ldots, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots, \\ &\text{при } t \to b: \quad \varphi(t) \sim b_1 (t-b)^{\beta_1} + b_2 (t-b)^{\beta_2} + \ldots, \quad \beta_1 < \beta_2 < \ldots. \end{aligned}$$

Для доказательства нужно разбить интеграл на два полубесконечных интеграла, сведя задачу к предыдущей, и вычесть разложения.

3.2. **Метод стационарной фазы.** Найдем асимптотику интеграла

$$F(x) = \int_{a}^{b} dt\, f(t) e^{ixp(t)},$$

где $p(t)$ гладкая вещественная функция, непрерывно дифференцируемая нужное число раз на отрезке $[a,b]$, причем имеющая на этом отрезке единственный экстремум в точке t_0 . Разобьем интервал на два отрезка монотонности функции $p(t)$ (пусть, для определенности, это точка минимума этой функции) и сделаем замену переменных:

$$F_1(x) = \int_{t_o}^{b} dt\, f(t) e^{ixp(t)} = e^{ixp(t_0)} \int_{t_0}^{b} dt\, f(t) e^{ix(p(t)-p(t_0))} =$$

(где мы рассмотрели часть отрезка: от t_0 до b. Положим: $u = p(t) - p(t_0)$)

$$= e^{ixp(t_0)} \int\limits_0^{\beta = p(b) - p(t_0)} \frac{du}{p'(t(u))} f(t(u)) e^{ixu}.$$

Положим $\varphi(u(t)) = \dfrac{f(t)}{p'(t)}$ и рассмотрим поведение этой функции в конечных точках интервала. При $t \to t_0$ имеем: $u \sim \dfrac{p''(t_0)}{2}(t - t_0)^2$ и $p'(t) \sim p''(t_0)(t - t_0) = \sqrt{2up''(t_0)}$. Отсюда

$$\varphi(u(t)) \sim \frac{f(t_0)}{\sqrt{2p''(t_0)}} u^{-1/2} \quad \text{при } u \to 0, \quad \text{т.е. при } \ t \to t_0,$$

$$\varphi(u(t)) \to \frac{f(b)}{p'(b)} \quad \text{при } u \to \beta, \quad \text{т.е. при } \ t \to b,$$

а тогда

$$F_1(x) = e^{ixp(t_0)} \frac{\Gamma(1/2) f(t_0)}{\sqrt{2p''(t_0)}} \left(\frac{i}{x}\right)^{1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - e^{ixp(b)} \frac{f(b)}{p'(b)} \frac{i}{x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Аналогично вычисления проводятся и для левого интервала. Нечетные в точке t_o слагаемые в сумме сокращаются, так что имеем окончательно

$$F(x) = e^{ixp(t_0)} f(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{2p''(t_0)}} \left(\frac{i}{x}\right)^{1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) +$$

$$+ \left(e^{ixp(a)} \frac{f(a)}{p'(a)} - e^{ixp(b)} \frac{f(b)}{p'(b)}\right) \frac{i}{x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

В случае максимума имеем в главном члене

$$\sqrt{\frac{2\pi}{-2p''(t_0)}} \left(\frac{-i}{x}\right)^{1/2}.$$

4. Лекция 4

4.1. **Метод перевала (комплексная версия).** Здесь мы рассмотрим вычисление асимптотики при $\lambda \to \infty$ интеграла

$$\int_C dz\, \varphi(z) e^{\lambda p(z)}$$

по некоторому контуру C на комплексной плоскости z. Функции $\varphi(z)$ и $p(z)$ предполагаются аналитическими по z. Идея состоит в сведении этого интеграла к интегралу типа Лапласа посредством замены $z = z(t)$:

$$\int\limits_a^b dt\, \varphi(t) e^{\lambda p(t)},$$

и использовании вещественного метода перевала. Для того, чтобы такой способ работал нужно, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) функция $\operatorname{Re} p(t)$ имеет единственный максимум (или минимум) во внутренней точке t_0,
(2) $\operatorname{Re}[\lambda(p(t) - p(t_0))] < 0$ всюду на контуре, где λ принадлежит некоторому сектору $S : \alpha_1 < \arg z < \alpha_2$.
(3) интеграл равномерно сходится по параметру $\lambda \in S$.

Тогда интеграл допускает асимптотическое разложение по степеням λ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S$. Коэффициенты асимптотического разложения определяются стандартным образом по асимптотическому поведению функций $p(z(t))$ и $\varphi(z(t))$ в окрестности точки t_0.

Вопрос: когда это можно сделать? $\operatorname{Re} p(z)$ – гармоническая функция. Гармоническая функция не имеет ни максимумов, ни минимумов во внутренних точках области определения. Что будет в точке, где $p'(z_0) = 0$ (в смысле аналитических функций: $\partial/\partial z(p(z_0)) = 0$)? Пусть ноль простой: $p''(z_0) \neq 0$. Тогда, положив для определенности $p''(z_0) = 2a$, где a - положительное вещественное число, имеем: $p(z) \sim a(z-z_0)^2 = a((x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 + 2i(x-x_0)(y-y_0)) + o(|z|^2)$, так что

$$\operatorname{Re} p(z) \sim a\left((x-x_0)^2 - (y-y_0)^2\right).$$

Значит, на контуре, заданном уравнением $y = y_0$ (на нем в качестве параметра t можно выбрать координату x) функция $\operatorname{Re} p(z) \sim a(x-x_0)^2$ и достигает в этой точке минимума, а на контуре, заданном уравнением $x = x_0$ (на нем в качестве параметра t можно выбрать координату y) функция $\operatorname{Re} p(z) \sim -a(y-y_0)^2$ достигает в этой точке максимума. Итак, если контур проходит через критическую точку z_0 и в ее окрестности проходит по линии $\operatorname{Im} p(z) = \operatorname{Im} p(z_0)$, то в этой окрестности применим вещественный метод перевала, дающий асимптотическое разложение интеграла по части контура внутри этой окрестности, причем полученное асимптотическое разложение будет верно во всяком секторе $|\arg \lambda| < \pi/2 - \delta$, $\delta > 0$. Если же нам удастся деформировать исходный контур так, чтобы на нем всюду было выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}[\lambda\,(p(z(t)) - p(z(t_0)))] < 0$$

для непустого сектора $S : \alpha_1 < \arg z < \alpha_2$ и точка z_0 осталась единственной критической точкой на контуре, то полученное асимптотическое разложение останется верным в этом секторе для всего интеграла.

Идеальный случай - когда контур интегрирования удается целиком деформировать в контур вида $\operatorname{Im}(p(z)) = \mathrm{const}$, с единственной критической точкой внутри. В этом случае получаем асимптотическое разложение интеграла в секторе $|\arg \lambda| < \pi/2 - \delta$. Главный член разложения, как и ранее, имеет вид

$$e^{\lambda p(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{p''(z_0)}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

Возникает проблема выбора знака для $1/\sqrt{p''(z_0)}$. Ответ состоит в том, что нужно писать: $e^{i\theta}/\sqrt{p''(z_0)}$, где $e^{i\theta}$ направлен вдоль контура интегрирования в направлении возрастания параметра интегрирования, в случае использования локального максимума, или в обратную сторону, если используется локальный минимум.

Пример. Функция Эйри $\mathrm{Ai}(z)$ при $z > 0$. Функция Эйри является решением дифференциального уравнения второго порядка

$$w''(z) = zw$$

. Уравнение имеет две особые точки - регулярную в нуле и иррегулярную в бесконечности. Оно имеет симметрию – домножение независимого переменного на любой корень кубический из единицы. Иными словами, при повороте комплексной плоскости на угол $\frac{2\pi}{3}$ решение уравнения Эйри переходит в (вообще говоря, другое) решение того же уравнения.

Применив к уравнению Эйри преобразование Лапласа (считая начальные условия нулевыми), получим уравнение

$$p^2 W(p) = -\frac{d}{dp} W(p),$$

которое имеет, например, решение вида $W(p) = e^{-\frac{p^3}{3}}$. Обращая преобразование Лапласа, получим функцию вида

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\frac{p^3}{3}+pz} dp.$$

В приведенной процедуре вопросы сходимости игнорировались. Можно заметить, что подинтегральное выражение быстро осцилирует, если $a = 0$. Прямой проверкой также можно убедиться что функция

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\frac{p^3}{3}+pz} dp$$

носящей название функция Эйри, действительно удовлетворяет уравнению Эйри. Исследуем асимптотику функцию Эйри, считая пока что z большим положительным числом. Приведем интеграл к виду комплексного интеграла Лапласа подходящей заменой переменных:

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\frac{p^3}{3}+pz} dp = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{it^3}{3}+itz} dt = \frac{z^{1/2}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{iu(s^3/3+s))},$$

где $u = z^{3/2}$. Использовались последовательные замены $ip = t$, $t = z^{1/2}s$. Критические точки тут $s = \pm i$, исходный же интеграл осциллирует и не проходит через критические точки.

$$p(s) = i\left(\frac{s^3}{3} + s\right) = i\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3ix^2y - 3xy^2 - iy^3}{3} + x + iy\right),$$

$$\mathrm{Re}\, p(s) = -x^2 y + \frac{y^3}{3} - y,$$

$$\mathrm{Im}\, p(s) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + x = x\left(\frac{x^2}{3} - y^2 + 1\right).$$

Контур можно деформировать в область $y > 0$ при малых y (поскольку в этом случае действительная часть показателя экспоненты отрицательна), так что его можно провести через критическую точку $s = i$. В этой точке $\mathrm{Im}\, p(s) = 0$, все же решения уравнения $\mathrm{Im}\, p(s) = 0$ образуют, согласно формуле выше, объединение вертикальной прямой $x = 0$ и гиперболы $x^2 - 3y^2 = -3$, которая проходит через точку $(0, 1)$ (т.е.,$s = i$) в горизонтальном направлении. $\mathrm{Re}\, p$ при этом локально выглядит как $(-x^2)$, т.е. имеем максимум. Тогда

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{z^{1/2}}{2\pi} e^{up(i)} \sqrt{\frac{2\pi}{p''(i)}} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} + O\left(\frac{1}{u}\right)\right).$$

У нас $p(i) = -2/3$, $p''(i) = -2$, $u = z^{3/2}$, так что

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{z^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \left(1 + O(z^{-1/2})\right).$$

На самом деле контур можно деформировать до гиперболы $x^2 - 3y^2 = -3$, на которой $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{const}$, так что область разложения $|\arg u| < \pi/2 - \delta$, или, эквивалентно, $|\arg z| < \pi/3 - \delta$.

5. Лекция 5

5.1. **Формула Эйлера–Маклорена.** Идея оценки интеграла Фурье – использование интегрирования по частям способом, противоположным естественному: мы заменяем интеграл, где подинтегральная функция содержит исходно исследуемую $f(t)$ на интеграл, содержащий $f'(t)$. Аналогичный прием используется для вычисления сумм:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} k(f(k) - f(k+1)) + (n-1)f(n)$$

(преобразование Абеля). Эйлер использовал эти два приема одновременно.

Рассматривается следующая задача. Фиксируем целое число a и функцию вещественного переменного $f(x)$. Исследуем отличие суммы

$$S_n = \frac{1}{2}f(a) + f(a+1) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

от интеграла $\int_a^n f(x)dx$. Соответствующую разность можно представить интегралом

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \int_a^n \omega_1(x)f'(x)dx, \qquad \text{где} \quad \omega_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}. \tag{5.1}$$

В самом деле, для всякого целого j имеем, интегрируя по частям,

$$\int_j^{j+1} \left(x - j - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx = \frac{f(j) + f(j+1)}{2} - \int_j^{j+1} f(x)dx.$$

Суммируя это тождество по j, приходим к (5.1). Другой способ вывода - использование интеграла Стильтьеса. Имеем

$$\int_a^n f(x)d[x] = f(a+1) + \ldots + f(n), \qquad \int_a^n f(x)d[-x] = -f(a) - \ldots - f(n-1),$$

так что

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \int_a^n f(x)d\left(\frac{[x] - [-x])}{2} - x\right).$$

Беря интеграл Стильтьеса по частям, получим

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = -\int_a^n f'(x)\left(\frac{[x] - [-x])}{2} - x\right)dx = -\int_a^n f'(x)\left([x] - x + \frac{1}{2}\right)dx$$

Продолжим, начиная с формулы (5.1), процесс интегрирования по частям. Заметим. что функция $\omega_1(x)$ периодична с периодом 1 и ее интеграл по периоду нулевой:

$$\omega_1(x) = \omega_1(x+1), \qquad \int_0^1 \omega_1(x)dx = 0, \qquad \text{и} \qquad \omega_1(x) = x - \frac{1}{2} \qquad \text{при} \qquad 0 \le x < 1.$$

Поэтому существует (теперь уже непрерывная) периодическая функция $\omega_2(x)$ с нулевым интегралом по периоду, такая. что $\omega_2'(x) = \omega_1(x)$. Нетрудно видеть, что

$$\omega_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

Интегрирование (5.1) по частям дает равенство

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \omega_2(x)f'(x)|_a^n - \int_a^n \omega_2(x)f''(x)dx \tag{5.2}$$

и, более общо,

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \sum_{s=2}^{m} \omega_s(x)f^{(s-1)}(x)|_a^n + (-1)^{m+1}\int_a^n \omega_m(x)f^{(m)}(x)dx \tag{5.3}$$

Это и есть формула Эйлера–Маклорена в простейшем варианте.

Периодические с периодом 1 функции $\omega_k(x)$ находятся рекуррентно из условий

$$\omega'_{k+1}(x)=\omega_k(x), \qquad \int_0^1 \omega_k(x)dx=0.$$

Для более явного описания функций $\omega_k(x)$ соберем их в производящую функцию

$$G(x,t)=\sum_{k\geq 0}\omega_k(x)t^k, \qquad 0\leq x<1$$

положив $\omega_0(x)=1$. Тогда условие $\omega'_{k+1}(x)=\omega_k(x)$ запишется в виде

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}=\sum \omega'_k(x)t^k=\sum \omega_{k-1}t^k=tG(x,t).$$

Дифференциальное уравнение $\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}=tG(x,t)$ легко решается:

$$G(x,t)=g(t)e^{tx},$$

где $g(t)$ - произвольная функция. Ее позволяет найти соотношение $\int_0^1 \omega_k(x)dx=\delta_{k,0}$, которое в терминах G имеет вид $\int_0^1 G(x,t)dx=1$:

$$\int_0^1 g(t)e^{tx}dx=\frac{g(t)}{t}e^{tx}\Big|_0^1=\frac{g(t)\left(e^t-1\right)}{t}=1,$$

откуда $g(t)=\frac{t}{e^t-1}$ и $G(x,t)=\frac{te^{xt}}{e^t-1}$. В принятых сейчас обозначениях (раньше использовали также нормировку без факториалов) функция $G(x,t)$ есть производящая функция многочленов Бернулли $B_k(x)$

$$G(x,t)=\sum_{k\geq 0}B_k(x)\frac{t^k}{k!}, \qquad \text{так что} \qquad \omega_k(x)=\frac{B_k(x-[x])}{k!}.$$

Более употребительные числа Бернулли определяются как значения полиномов Бернулли в нуле, $B_k=B_k(0)$, так что $t/(e^t-1)$ является их производящей функцией:

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}t^n.$$

Полиномы Бернулли выражаются через числа Бернулли. В самом деле, из вида соответствующих производящих функций следует равенство формальных рядов по t: $e^{tx}\sum_k B_k t^k/k! = \sum_n B_n(x)t^n/n!$, т.е.,

$$\left(\sum_l \frac{(xt)^l}{l!}\right)\left(\sum_k B_k\frac{t^k}{k!}\right)=\sum_n B_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

откуда

$$B_n(x)=\sum_{j=0}^n B_{n-j}x^j\binom{n}{j}.$$

Далее, производящая функция $G(x,t)$ инвариантна относительно замены $x\leftrightarrow 1-x$, $t\leftrightarrow -t$, поэтому $B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)$, в частности, $B_n(1)=(-1)^nB_n(0)$. Поскольку функции $\omega_k(x)$ периодичны и непрерывны при $n\geq 3$, заключаем, что $B_{2k+1}=0$ при $k\geq 1$. Первые значения чисел Бернулли: $B_0=1$, $B_1=-\dfrac{1}{2}$, $B_2=\dfrac{1}{12}$, $B_3=0$, $B_4=\dfrac{1}{30}$. Теперь формулы (5.2) и (5.3) можно переписать следующим образом:

$$\sum_a^n f(j)=\int_a^n f(x)dx+\frac{1}{2}(f(a)+f(n))+\frac{1}{12}(f'(n)-f'(a))-\int_a^n\frac{B_2(x-[x])}{2}f''(x)dx, \tag{5.4}$$

$$\sum_a^n f(j)=\int_a^n f(x)dx+\frac{1}{2}(f(a)+f(n))+\sum_{s=2}^m\frac{B_{2s}}{(2s)!}\left(f^{(2s-1)}(n)-f^{(2s-1)}(a)\right)+R_m, \tag{5.5}$$

где остаток

$$R_m = -\int_a^n \frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!} f^{(2m)}(x)dx.$$

5.2. **Применения формулы Эйлера–Маклорена.** Прежде всего хотелось бы иметь хоть какую-нибудь оценку остаточного члена R_m, точнее, подинтегрального выражения $\frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!}$. Грубая оценка получается из изучения особенностей производящей функции $G(x,t)$. Эта функция имеет полюса по t в точках $t = 2\pi ik$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Это означает, что радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k\geq 0} \frac{B_k(x)}{k!} t^k$ равен 2π, так что для любого r, $0 < r < 1$ выражение $\frac{B_k(x)}{k!}(2\pi r)^k$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Таким образом, имеем оценку

$$\left|\frac{B_k(x)}{k!}\right| < C(r)\frac{1}{(2\pi r)^k}$$

для любого r, $0 < r < 1$.

Формулу Эйлера–Маклорена естественно применять для функций $f(x)$, производные $f^{(n)}(x)$ которых убывают с ростом n. Допустим, мы находимся ровно в такой ситуации и хотим оценить асимптотику суммы $\sum_a^n f(j)$ по параметру n. Тогда слагаемые $\dfrac{B_2s}{(2s)!} f^{(2s-1)}(a)$ собираются в сумму, не зависящую от n. Имеется простой изящный прием, позволяющий избавиться от них сразу. Предположим, например, что уже $\int_a^{+\infty} f''(x)dx$ абсолютно сходится. Преобразуем формулу (5.4) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sum_a^n f(j) &= \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \frac{1}{12}(f'(n)-f'(a)) - \int_a^n \omega_2(x)f''(x)dx \\
&= \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \frac{1}{12}(f'(n)-f'(a)) - \int_a^\infty \omega_2(x)f''(x)dx + \int_n^\infty \omega_2(x)f''(x)dx \\
&= \int_a^n f(x)dx + \frac{f(n)}{2} + \frac{f'(n)}{12} + C + \int_n^\infty \omega_2(x)f''(x)dx,
\end{aligned}$$

где

$$C = \frac{f(a)}{2} - \frac{f'(a)}{12} - \int_a^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2} f''(x)dx. \tag{5.6}$$

Теперь будем описанным ранее методом интегрировать $\int_n^\infty \omega_2(x)f''(x)dx$ по частям:

$$\int_n^\infty \omega_2(x)f''(x)dx = \omega_3(n)f^{(3)}(n) - \int_n^\infty \omega_3(x)f^{(3)}(x)dx$$

и т.д. В результате получим формулу

$$\sum_a^n f(j) = \int_a^n f(x)dx + C + \frac{f(n)}{2} + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(n) + R_m,$$

где C задано соотношением (5.6) и

$$R_m = \int_n^\infty \frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!} f^{(2m)}(x)dx.$$

Пример. Асимптотическая оценка $n!$ (точнее, $\ln n!$). Представим $\ln n!$ в виде суммы $\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n$ и применим предыдущие рассуждения для функции $f(x) = \ln x$. Ее производные имеют вид $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$. В частности,

$\int_1^\infty f''(x)dx = -\int_1^\infty 1/x^2 dx$ сходится. Поэтому

$$\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \int_1^n \ln x dx + \frac{1}{2}\ln n + C + \sum_{s=1}^{m} \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(n) + R_m$$

$$= (x\ln x - x)\big|_1^n + \frac{1}{2}\ln n + C + \sum_{s=1}^{m} \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(n) + R_m$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + 1 + C + \sum_{s=1}^{m} \frac{B_{2s}}{(2s)(2s-1)n^{2s-1}} + R_m,$$

где

$$C = -\frac{1}{12} + \int_1^\infty \frac{B_{2s}(x-[x])}{(2x^2)}dx, \qquad R_m = \int\limits_n^\infty \frac{B_{2m}(x-[x])}{2mx^{2m}}dx.$$

Интегрируя по частям, замечаем, что $R_m = O(1/n^{2m})$. Для постоянной C можно получить другое выражение, заметив, что в силу описанной выше формулы

$$C + 1 = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + n\right),$$

и, применив формулу Стирлинга для $n! = \Gamma(n+1)$,

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + o(1)\right),$$

получим, что $C + 1 = \frac{1}{2}\ln 2\pi$, и в итоге полное асимптотическое разложение

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{s=1}^{m} \frac{B_{2s}}{(2s)(2s-1)n^{2s-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2m}}\right).$$

5.3. **Ряд Стирлинга для** $\ln\Gamma(z)$**.** . Подобным же образом можно получить полное асимптотическое разложение для логарифма Г-функции Эйлера. Воспользумся, к примеру, определением Эйлера:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Тогда

(5.7) $$\ln\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\big((\ln 1 + \ldots \ln n) - (\ln z + \ldots \ln(z+n)) + z\ln n\big).$$

Воспользуемся для каждой из сумм интегральным представлением (5.4):

$$\ln 1 + \ldots + \ln n = \int_1^n \ln x dx + \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln n) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \int_1^n \frac{B_2(x-[x])}{2x^2}dx,$$

$$\ln z + \ldots + \ln(z+n) = \int_0^n \ln(x+z)dx + \frac{1}{2}(\ln z + \ln(z+n)) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{z}\right) + \int_0^n \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx.$$

Подставляя эти представления в (5.7), получим

$$\ln\Gamma(z) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \ln x dx - \int_0^n \ln(x+z)dx + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{n}{z(n+z)}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{z}{n(z+n)} - \frac{z-1}{z}\right) + z\ln n\right)$$

$$+ C - \int_0^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx,$$

где $C = \int_1^n \frac{B_2(x-[x])}{2x^2}dx$.

Вычислим вначале предел во второй строке последней формулы:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \ln x dx - \int_0^n \ln(x+z)dx + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{n}{z(n+z)}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{z}{n(z+n)} - \frac{z-1}{z}\right) + z\ln n\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\left((x\ln x - x)\Big|_1^n - ((x+z)\ln(x+z) - (x+z))\Big|_{x=0}^{x=n} - \frac{1}{2}\ln z + z\ln n + \frac{1}{12z} - 1\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(n\ln n - (n+z)\ln(n+z) + z\ln z - \frac{1}{2}\ln z + z\ln n + \frac{1}{12z}\right) =$$
$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z + \frac{1}{12z} - \lim_{n\to\infty}(n+z)\ln\frac{n+z}{n} = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z + \frac{1}{12z} - \lim_{n\to\infty}(n+z)\ln\left(1+\frac{z}{n}\right) =$$
$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z + \frac{1}{12z} - \lim_{n\to\infty}(n+z)\frac{z}{n} = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{12z}.$$

Оставшийся интеграл

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx = \int_0^\infty \frac{\omega_2(x)}{(x+z)^2}dx$$

оценим привычным способом интегрирования по частям с применением функций $\omega_k(x)$:

$$F(z) = -\sum_{s=2}^{m}\frac{B_{2s}}{2s(2s-1)z^{2s-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2m}}\right),$$

так что

$$\ln\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + C + \sum_{s=2}^{m}\frac{B_{2s}}{2s(2s-1)z^{2s-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2m}}\right) \qquad (5.8)$$

где $C = \frac{1}{2}\ln 2\pi$, например, из того же сравнения с формулой Стирлинга для $\Gamma(z)$.

Область параметра z, в которой работает асимптотическое разложение (5.8), определяется областью применимости асимптотической оценки интеграла

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx$$

при больших z. Для этого знаменатель $x+z$ должен быть равномерно отделен от нуля, т.е., асимптотическое разложение Стирлинга для $\ln\Gamma(z)$ справедливо в области $|\arg z| < \pi - \delta$ для сколь угодно малого положительного δ.

6. Лекция 6

6.1. **Теорема Хана–Банаха.** Нам потребуется несколько известных определений и теорем, которые мы приводим здесь для полноты.

Определение 6.1. *Отношение R на множестве X, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности (последнее означает, что xRy и yRx влекут за собой равенство $x = y$), называется **отношением частичного упорядочения** (или просто частичным упорядочением). Если R – частичное упорядочение, то иногда вместо xRy пишут $x \prec y$.*

Определение 6.2. *Если для всех x и y из X или $x \prec y$, или $y \prec x$, то множество X называется **линейно упорядоченным**.*

Определение 6.3. *Пусть множество X частично упорядочено отношением $\prec$ и пусть $Y \subset X$. Элемент $p \in X$ называется **верхней гранью** множества Y, если $y \prec p$ для всех $y \in Y$. Если условия $m \in X$, $m \prec x$ ведут к тому, что $m = x$, то m называется **максимальным элементом** множества X.*

Лемма 6.1 (Лемма Цорна). *Пусть X – непустое частично упорядоченное множество, такое, что каждое его линейно упорядоченное подмножество имеет в X верхнюю грань. Тогда каждое линейно упорядоченное множество в X обладает некоторой верхней гранью, которая является в то же время максимальным элементом в X.*

Определение 6.4. *Нормированное векторное пространство – это векторное пространство V над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{Z}$) вместе с функцией $\|\cdot\|$ из V в $\mathbb{R}$ (**нормой**), удовлетворяющей условиям:*

1. *для всех v из V норма $\|v\| \geq 0$;*
2. *$\|v\| = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$;*
3. *для всех v из V и α из $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ всех $\|v\|$;*
4. *для всех v и w из V выполнено неравнество треугольника: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.*

Определение 6.5. *Полное нормированное линейное пространство называется **банаховым пространством**.*

Банаховы пространства обладают многими свойствами эвклидовых: это векторные пространства, норма в них опеределяет понятие расстояния, а всякая последовательность Коши имеет предел.

В описании обобщенных функций банаховы пространства возникают следующим образом. Введем в $\mathscr{S}$ счетное число норм, определенных как

$$\|\phi\|_p = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ \alpha\leq p}}(1+|x|^2)^{p/2}|\partial_x^\alpha \phi(x)|, \quad p = 0, 1, \ldots . \tag{6.1}$$

Очевидно, что

$$\|\phi\|_0 \leq \|\phi\|_1 \leq \|\phi\|_2 \leq \ldots, \tag{6.2}$$

а сходимость в $\mathscr{S}$ можно эквивалентно определить следующим образом: последовательность функций ϕ_1, ϕ_2, … из $\mathscr{S}$ сходится к нулю, $\phi_k \to 0$ в $\mathscr{S}$ при $k \to \infty$, если для всех $p = 0, 1, \ldots$ последовательности $\|\phi_k\|_p \to 0$ при $k \to \infty$.

Пусть $\mathscr{S}_p$ означает пополнение $\mathscr{S}$ по p-ой норме. Каждое $\mathscr{S}_p$ – банахово пространство и справедливы вложения:

$$\mathscr{S}_0 \supset \mathscr{S}_1 \supset \mathscr{S}_2 \supset \ldots,$$

причем каждое вложение $\mathscr{S}_{p+1} \subset \mathscr{S}_p$ непрерывно в силу (6.2). Можно доказать, что это вложение вполне непрерывно (компактно), т.е. из всякого бесконечного ограниченного множества в $\mathscr{S}_{p+1}$ можно выбрать последовательность, сходящуюся в $\mathscr{S}_p$. Отсюда вытекает, что $\mathscr{S}$ – полное пространство и $\mathscr{S} = \bigcap_{p\geq 0} \mathscr{S}_p$.

Теорема 6.1 (Теорема Лорана Шварца)**.** *Пусть M' – слабо ограниченное множество функционалов из $\mathscr{S}'$, т.е. $|(f,\phi)| < C_\phi$ для всех $f \in M'$ и $\phi \in \mathscr{S}$. Тогда существуют такие числа $K \geq 0$ и $m \geq 0$, что*

$$|(f,\phi)| \leq K\|\phi\|_m, \quad f \in M', \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Если неравенство (6.3) несправедливо, то найдутся последовательности $\{f_k\}$ – функционалов из M' и ϕ_k – функций из $\mathscr{S}$ такие, что

$$|(f_k,\phi_k)| \geq k\|\phi_k\|_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Последовательность функций

$$\psi_k(x) = \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{k}\|\phi_k\|_k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

стремится к 0 в $\mathscr{S}$, ибо при $k \geq p$:

$$\|\psi_k\|_p = \frac{\|\phi_k\|_p}{\sqrt{k}\|\phi_k\|_k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Последовательность функционалов $\{f_k\}$ ограничена на каждой основной функции ϕ из $\mathscr{S}$. Поэтому для нее $(f_k, \psi_k) \to 0$ при $k \to \infty$. С другой стороны, неравенство (6.3) дает

$$|(f_k,\psi_k)| = \frac{|(f_k,\phi_k)|}{\sqrt{k}\|\phi_k\|_k} \geq \sqrt{k}.$$

Полученное противоречее и доказывает теорему.

Следствие 6.1. *Всякая обобщенная функция умеренного роста имеет конечный порядок, т.е. допускает продолжение как линейный непрерывный функционал из некторого (наименьшего) сопряженного пространства $\mathscr{S}'_m$, при этом неравенство (6.3) принимает вид*

$$|(f,\phi)| \leq \|f\|_{-m}\|\phi\|_m, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{6.4}$$

где $\|f\|_{-m}$ – норма функционала f в $\mathscr{S}'_m$, m – порядок f.

Таким образом спряведливы соотношения

$$\mathscr{S}'_0 \subset \mathscr{S}'_1 \subset \mathscr{S}'_2 \subset \ldots, \qquad \mathscr{S}' = \bigcup_{p\geq 0} \mathscr{S}'_p.$$

Теорема 6.2 (Теорема Хана–Банаха)**.** *Пусть X – вещественное векторное пространство, p – вещественная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y)$ для всех $x, y \in X$, $\alpha \in [0,1]$. Предположим, что λ – линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и удовлетворяющий неравенству $\lambda(x) \leq p(x)$ для всех $x \in Y$. Тогда существует линейный функционал Λ, определенный на X, такой, что $\Lambda(x) \leq p(x)$ для всех $x \in X$ и $\Lambda(x) = \lambda(x)$ для всех $x \in Y$.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Сначала покажем, что если $z \in X$, но $z \notin Y$, то λ можно продолжить на пространство, натянутое на z и Y. А потом воспользуемся рассуждением по лемме Цорна и покажем, что подобный процесс позволяет продолжить λ на все пространство X.

Пусть $\widetilde{Y}$ – подпространство, натянутое на Y и z. Пусть $\widetilde{\lambda}$ – продолжение λ на $\widetilde{Y}$, оно будет описано, коль скоро мы определим $\widetilde{\lambda}(z)$, т.к.

$$\widetilde{\lambda}(uz + y) = u\widetilde{\lambda}(z) + \lambda(y), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Пусть $y_1, y_2 \in Y$ и пусть $\alpha, \beta > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\beta\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2) = \lambda(\beta y_1 + \alpha y_2) = (\alpha+\beta)\lambda\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}y_1 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_2\Big) \leq \\ \leq (\alpha+\beta)p\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}(y_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(y_2 + \beta z)\Big) \leq \\ \leq \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z).\end{aligned}$$

Значит, для всех $\alpha, \beta > 0$ и $y_1, y_2 \in Y$

$$\frac{1}{\alpha}\big[-p(y_1 - \alpha z) + \lambda(y_1)\big] \leq \frac{1}{\beta}\big[p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)\big],$$

а потому существует такое вещественное a, что

$$\sup_{\substack{y\in Y\\ \alpha>0}} \frac{1}{\alpha}\big[-p(y - \alpha z) + \lambda(y)\big] \leq a \leq \inf_{\substack{y\in Y\\ \alpha>0}} \frac{1}{\alpha}\big[p(y + \alpha z) - \lambda(y)\big].$$

Положим тогда $\widetilde{\lambda}(z) = a$. Легко видеть, что полученное продолжение удовлетворяет неравенству $\widetilde{\lambda}(x) \leq p(x)$ при всех $x \in \widetilde{Y}$. Итак, мы показали, что λ за один шаг может быть продолжено на одно измерение.

Для завершения доказательства воспользуемся леммой Цорна. Пусть $\mathcal{E}$ – набор расширений e функционала λ, удовлетворяющих условию $e(x) \leq p(x)$ на тех подпространствах, где они определены. Введем в $\mathcal{E}$ частичное упорядочение, положив $e_1 \prec e_2$, если e_2 определено на большем множестве, чем e_1 и $e_2(x) = e_1(x)$ там, где они оба определены. Пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{E}$; пусть X_α – то подпространство, на котором определено e_α. Определим e на $\cup_{\alpha\in A} X_\alpha$, положив $e(x) = e_\alpha(x)$, если $x \in X_\alpha$. Очевидно, что $e_\alpha \prec e$, так что всякое линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{E}$ имеет верхнюю грань. В силу леммы Цорна $\mathcal{E}$ содержит максимальный элемент Λ, определенный на некотором множестве X' и удовлетворяющий условию $\Lambda(x) \leq p(x)$ при $x \in X'$. Но X' должно совпадать со всем X, так как в противном случае мы могли бы продолжить Λ на более широкое пространство, добавляя, как и выше, еще одно измерение. Поскольку это противоречит максимальности Λ, должно быть $X = X'$. Значит расширение Λ определено всюду.

Литература к лекции 6: М.Рид, Б.Саймон "Методы современной математической физики", том 1, "Функциональный анализ"; В.С.Владимиров "Обобщенные функции в математической физике".

7. Лекция 7

7.1. **Теорема Хана–Банаха, комплексный случай.**

Теорема 7.1. *Пусть X – комплексное векторное пространство, p – вещественная положительная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x+\beta y) \le |\alpha|p(x)+|\beta|p(y)$ при любых $x, y \in X$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ таких, что $|\alpha| + |\beta| = 1$. Пусть λ – комплексный линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и удовлетворяющий условию $|\lambda(x)| \le p(x)$ при любом $x \in Y$. Тогда существует комплексно линейный функционал Λ, определенный на X, удовлетворяющий условию $|\Lambda(x)| \le p(x)$ при любом $x \in X$ и такой, что $\Lambda(x) = \lambda(x)$ при $x \in Y$.*

Доказательство. Положим $\ell(x) = \mathrm{Re}\{\lambda(x)\}$, так что ℓ – вещественно линейный функционал на Y и, поскольку $\ell(ix) = \mathrm{Re}\{\lambda(ix)\} = \mathrm{Re}\{i\lambda(x)\} = -\operatorname{Im}\lambda(x)$, то $\lambda(x) = \ell(x) - i\ell(ix)$. Т.к. ℓ – вещественно линеен и $p(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y)$ при любом $\alpha \in [0, 1]$, то существует вещественно линейное расширение L на все X, удовлетворяющее условию $L(x) \le p(x)$. Положим $\Lambda(x) = L(x) - iL(ix)$. По построению это – вещественно линейный функционал, являющийся расширением функционала λ. Но поскольку $\Lambda(ix) = L(ix) - iL(-x) = i\Lambda(x)$, то Λ – комплексно линеен. Осталось доказать, что $|\Lambda(x)| \le p(x)$. Заметим, что $p(\alpha x) \le p(x)$ для любого α такого, что $|\alpha| = 1$. Обозначим $\theta = \mathrm{Arg}(\Lambda(x))$. Тогда в силу равенства $\mathrm{Re}\,\Lambda = L$, имеем:

$$|\Lambda(x)| = e^{-i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-i\theta}x) = \mathrm{Re}\,\Lambda(e^{-i\theta}x) =$$
$$= L(e^{-i\theta}x) \le p(e^{-i\theta}x) \le p(x),$$

что и требовалось доказать.

7.2. **Структура обобщенных функций медленного роста.**

Теорема 7.2. *Если $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, то существует непрерывная функция g медленного роста на $\mathbb{R}^n$ и целое число $m \ge 0$ такие, что $f(x) = D_1^m \dots D_n^m g(x)$.*

Доказательство. Проведем его для случая $n = 1$. По теореме Шварца существуют числа K и p такие, что для любой $\varphi \in \mathscr{S}$ имеем

$$|(f, \varphi)| \le K\|\varphi\|_p \le K \max_{\alpha \le p} \int dx \left| \frac{d}{dx}[(1 + x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)] \right|,$$

так что

$$|(f, \varphi)| \le K \max_{\alpha \le p} \left\| \frac{d}{dx}[(1 + x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)] \right\|_{\mathcal{L}^1}.$$

Положим $\psi_\alpha = \dfrac{d}{dx}[(1 + x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)]$. Это сопоставляет каждой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ набор $\{\psi_\alpha\}$, т.е. мы имеем отображение $\varphi \to \{\psi_\alpha\}$ из пространства $\mathscr{S}$ в пространство $\oplus_{\alpha \le p}\mathcal{L}^1$ с нормой $\|\{f_\alpha\} = \max_{\alpha \le p} \|f_\alpha\|_{\mathcal{L}^1}$. На линейном подмножестве $\{\{\psi_\alpha\}, \varphi \in \mathscr{S}\}$ пространства $\oplus_{\alpha \le p}\mathcal{L}^1$ введем линейный функционал f^* посредством равенства $(f^*, \{\psi_\alpha\}) = (f, \varphi)$. В силу доказанного выше

$$|(f^*, \{\psi_\alpha\})| = |(f, \varphi)| \le K \max_{\alpha \le p} \|\psi_\alpha\|_{\mathcal{L}^1} \le K\|\{\psi_\alpha\}\|,$$

так что функционал f^* непрерывен. Тогда в силу теорем Хана–Банаха и Ф. Рисса существует вектор функция $\chi_\alpha \in \oplus_{\alpha \le p}\mathcal{L}^\infty$ такая, что

$$(f^*, \{\psi_\alpha\}) = \sum_{\alpha \le p} \int dx \chi_\alpha(x)\psi_\alpha(x).$$

Здесь $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ – множество комплексно значных измеримых функций на $\mathbb{R}$, таких что почти всюду по мере Лебега $|f(x)| \le M$ при некотором $M < \infty$. Норма $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$ – наименьшее из таких

M. Пространство $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ банахово. Итак, для любого $\varphi \in \mathscr{S}$:

$$(f,\varphi) = \sum_{\alpha\le p} \int dx\, \chi_\alpha(x) \frac{d}{dx}[(1+x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)] =$$
$$= \sum_{\alpha\le p} \int dx g_\alpha(x) \phi^{\alpha+2}(x).$$

Здесь добавлена одна производная в $\varphi^{(\alpha+2)}$, чтобы обеспечить непрерывность функции g_α, являющейся первообразной факторов $\varphi^{(\alpha+1)}(x)$ в первой строчке. Окончательно получаем:

$$f(x) = \frac{d^m}{dx^m} g(x), \text{ где } m = p+2,$$

что и требовалось доказать.

7.3. **Обобщенные функции нескольких переменных.** Основные определения здесь являются непосредственным обобщением определений одномерного случая. Для их формулировки удобно ввести следующие обозначения. Вектор $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ имеет норму $|x| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$. Комплексный вектор $z \in \mathbb{C}^n$ равен $z = x+iy$, где вещественные вектора $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}^n$ и $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}^n$. Открытые множества в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $\mathscr{O}$, $\partial\mathscr{O}$ означает границу, а $\overline{\mathscr{O}}$ – замыкание, так что $\mathscr{O} = \overline{\mathscr{O}} \setminus \partial\mathscr{O}$. Будем говорить, что множество A компактно в открытом множестве $\mathscr{O}$ (строго содержится в $\mathscr{O}$), если A ограничено и его замыкание $\overline{A}$ содержится в $\mathscr{O}$: $A \Subset \mathscr{O}$.

Мультииндексом $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ называется набор n целых неотрицательных чисел. Обозначим:

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$
$$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$
$$D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right), \qquad D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

7.4. **Примеры.**

7.4.1. *Простой слой.* Определим поверхностную дельта-функцию следующим образом. Пусть S – кусочно-гладкая поверхность в R^n и $\mu(x)$ – непрерывная функция на S. Введем обобщенную функцию $\mu\delta_S$ как

$$(\mu\delta_S, \phi) = \int_S \mu(x)\phi(x)dS, \qquad \phi \in S. \tag{7.1}$$

Понятно, что $\mu\delta_S \in \mathscr{D}'$, $\mu\delta_S = 0$, $\operatorname{supp}\mu\delta_S \subset S$, так что $\mu\delta_S$ – сингулярная мера при ненулевой μ. Такая обобщенная функция называется **простым слоем на поверхности** S. Она описывает пространственную плотность масс или зарядов, сосредоточенных на поверхности S с поверхностной плотностью μ. Т.е. плотность простого слоя определяется как слабый предел плотностей, соответствующих дискретному распределению на поверхности S:

$$\sum_k \mu(x_k)\delta(x-x_k)\Delta S_k, \qquad x_k \in S,$$

при неограниченном измельчении поверхности S.

7.4.2. *Диполь.* Вычислим плотность зарядов, соответствующих диполю момента $+1$, раположенного в точке $x=0$ и ориентированного вдоль заданного направления $\vec{l} = (l_1,\dots,l_n)$, $|\vec{l}| = 1$. Приближенно ему соответствует плотность заряда

$$\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-\varepsilon\vec{l}) - \frac{1}{\varepsilon}\delta(x) \qquad \varepsilon > 0, \tag{7.2}$$

так что в пределе для $\phi \in \mathscr{D}$ meem:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-\varepsilon\vec{l})-\frac{1}{\varepsilon}\delta(x)\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon}\big(\phi(\varepsilon\vec{l})-\phi(0)\big)= \tag{7.3}$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial\vec{l}}(0)=\left(\delta,\frac{\partial\phi}{\partial\vec{l}}\right)=-\left(\frac{\partial\delta}{\partial\vec{l}},\phi\right), \tag{7.4}$$

где искомая плотность равна

$$-\frac{\partial\delta}{\partial\vec{l}}\equiv-\sum_k l_k\frac{\partial\delta}{\partial x_k}.$$

Полный заряд диполя равен нулю: $-(\partial\delta/\partial\vec{l},1)=0$, а его момент равен $-(\partial\delta/\partial\vec{l},\sum_{k=1}^n x_k l_k)=1$.

7.4.3. *Двойной слой.* Обобщением предыдущего примера является **двойной слой** на поверхности. Пусть S – кусочно гладкая двустороняя поверхность. Пусть $\vec{n}$ – нормаль к ней и ν – непрерывная функция на S. Введем обобщенную функцию$-\frac{\partial}{\partial\vec{n}}(\nu\delta_S)$ как

$$\left(-\frac{\partial\nu\delta_S}{\partial\vec{n}},\phi\right)=\int_S dS\,\nu(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial\vec{n}}, \tag{7.5}$$

где $\phi \in \mathscr{D}'$. Она, очевидно, принадлежит $\mathscr{D}'$ и имеет носитель на S. Она описывает пространственную плотность зарядов, соответствующую распределению диполей на поверхности S с поверхностной плотностью момента $\nu(x)$ и ориентированных вдоль заданного направления нормали $\vec{n}$ на S. Так что формально плотность двойного слоя определяется как слабый предел плотностей, соответствующих дискретному распределению диполей на поверхности S.

Литература к лекции 7: М.Рид, Б.Саймон "Методы современной математической физики", том 1, "Функциональный анализ"; В.С.Владимиров "Обобщенные функции в математической физике".

8. Лекция 8

8.1. Обобщенная функция r^λ. Положим $r = |x| \equiv \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ и введем функционал r^λ

$$(r^\lambda, \phi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx\, r^\lambda \phi(x), \qquad \phi \in \mathscr{D}, \tag{8.1}$$

хорошо определенный при достаточно больших $\operatorname{Re}\lambda > -n$. При таких λ интеграл можно дифференцировать, что дает

$$\frac{\partial (r^\lambda, \phi)}{\partial \lambda} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx\, r^\lambda \ln r \phi(x),$$

так что r^λ представляет собой аналитическую функцию от λ при $\operatorname{Re}\lambda > -n$. Поскильку при $\operatorname{Re}\lambda \leq -n$ функция r^λ локально интегрируема, продолжим ее как обобщенную функцию путем сведения ее к рассмотренной ранее функции x_+^λ . Перейдем в (8.1) к сферическим координатам:

$$\begin{aligned}
&x_1 = r \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_{n-1},\\
&x_2 = r \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_{n-1},\\
&x_3 = r \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \cdots \sin\alpha_{n-1},\\
&\dots\\
&x_n = r \cos\alpha_{n-1}
\end{aligned}$$

Якобиан этого преобразования равен

$$J = r^{n-1} \sin\alpha_2 \sin^2\alpha_3 \cdots \sin^{n-2}\alpha_{n-1}.$$

Тогда

$$(r^\lambda, \phi) = \int\limits_0^\infty dr\, r^{\lambda+n-1} \int\limits_S d\omega\, \phi(r\omega),$$

где $r\omega = x$ по предыдущей подстановке и $d\omega$ – элемент единичной сферы S. Площадь Ω_n этой сферы равна

$$\Omega_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \equiv \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{8.2}$$

Введем среднее значение функции ϕ на сфере радиуся r:

$$S_\phi(r) = \frac{1}{\Omega_n} \int\limits_S d\omega\, \phi(r\omega), \tag{8.3}$$

так что

$$(r^\lambda, \phi) = \Omega_n \int\limits_0^\infty dr\, r^{\lambda+n-1} S_\phi(r). \tag{8.4}$$

Функция $S_\phi(r)$ определена при $r \geq 0$, финитна, бесконечно дифференцируема и все ее нечетные производные обращаются в ноль при $r = 0$. Финитность ее следует из финитности $\phi(x)$. Далее, разложим $\phi(x)$ по формуле Тейлора до некоторого конечного порядка с остаточным членом:

$$\Omega_n S_\phi(r) = \int\limits_\Omega d\omega \Bigg[\phi(0) + \sum_j \phi_j(0) x_j + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} \phi_{i,j}(0) x_j x_j + \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k} \phi_{i,j,k}(0) x_j x_j x_k + \dots\Bigg].$$

видно, что каждое слагаемое, кроме остаточного члена, содержащее нечетное количество x'ов обращается в нуль ввиду симметрии сферы. В силу замены переменных, получаем:

$$S_\phi(r) = \phi(0) + a_1 r^2 + a_2 r^4 + \dots a_k r^{2k} + o(r^{2k}).$$

Поскольку k произвольно, то видим, что эта функция бесконечно дифференцируема и все ее нечетные производные в нуле обращаются в нуль. Поэтому $S_\phi(r)$ можно считать четной основной функцией переменной r. Таким образом интеграл (8.4) есть результат применения обобщенной функции $\Omega_n x_+^\mu$ к основной функции $S_\phi(x)$. Функция x_+^μ допускает аналитическое продолжение из $\mathrm{Re}\,\mu > -1$ на всю комплексную плоскость μ за исключением выколотых точек $\mu = -1, -2, \ldots$. В этих точках она имеет полюса, причем вычет в точке $\mu = -m$ равен

$$\operatorname*{res}_{\mu=-m} x_+^\mu = \frac{(-1)^{m-1}\delta^{m-1}(x)}{(m-1)!}.$$

Значит функция (r^λ, ϕ) допускает аналитическое продолжение на комплексную плоскость λ с выколотыми точками $\lambda = -n-m+1$, $m \geq 0$, в которых она имеет вычеты

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-n-m+1}(r^\lambda, \phi) = \Omega_n \frac{S_\phi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!},$$

но как мы видели нечетные производные обращаются в нуль, значит вычеты имеют место только при нечетных m: $\lambda = -n-2k$, $k \geq 0$:

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-n-2k}(r^\lambda, \phi) = \Omega_n \frac{S_\phi^{(2k)}(0)}{(2k)!}, \qquad \operatorname*{res}_{\lambda=-n-2k} r^\lambda = \Omega_n \frac{\delta^{(2k)}(x)}{(2k)!}. \tag{8.5}$$

С другой стороны, непосредственное применение оператора Лапласа Δ к r^λ при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ дает

$$\Delta r^{\lambda+2} = (\lambda+2)(\lambda+n) r^\lambda, \tag{8.6}$$

которое допускает аналитическое продолжение на те же значения λ. Полагая здесь $\lambda = -n$ в силу определения вычета и равенства (8.5) получаем, что

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = (2-n)\Omega_n \delta(x), \tag{8.7}$$

т.е. обобщенная функция $1/r^{n-2}$ дает фундаментальное решение

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2(2-n)\pi^{n/2}} \frac{1}{r^{n-2}} \equiv -\frac{\Gamma(n/2-1)}{4\pi^{n/2} r^{n-2}} \tag{8.8}$$

для оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta \mathcal{E}(x) = \delta(x), \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{8.9}$$

В случае $n = 2$ фундаментальное решение есть

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{8.10}$$

Литература к лекции 8: И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”; В.С.Владимиров , В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”,

9. Лекция 9

9.1. Фундаментальное решение оператора Лапласа в размерности 2. Докажем равенство (8.10). Полагая, как обычно, $z = x + iy = \rho e^{i\phi}$, где $\phi = \arg z$ и $-\pi \le \phi \le \pi$, мы используем здесь обозначения:

$$d^2 z = dxdy = \frac{dz \wedge d\overline{z}}{2i}, \tag{9.1}$$

$$\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{e^{-i\phi}}{2}\left(\partial_\rho + \frac{1}{i\rho}\partial_\phi\right), \tag{9.2}$$

$$\overline{\partial_z} \equiv \partial_{\overline{z}} \equiv \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{e^{i\phi}}{2}\left(\partial_\rho - \frac{1}{i\rho}\partial_\phi\right). \tag{9.3}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(\partial_z \ln z, f) &= -(\ln z, \partial_z f) = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\phi [\ln\rho + 1 + i\phi] e^{-i\phi} f(\rho e^{i\phi}) - \\
&- \frac{1}{2}\int_0^\infty d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\phi [\ln\rho - 1 + i\phi] e^{-i\phi} f(\rho e^{i\phi}) + \frac{1}{2i}\int_0^\infty [\ln\rho + i\phi] e^{-i\phi} f(\rho e^{i\phi})\Big|_{-\pi}^{\pi} = \\
&= \int_0^\infty d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-i\phi} f(\rho e^{i\phi}) + \pi \int_0^\infty d\rho\, f(-\rho) = \\
&= \left(\frac{1}{z}, f\right) + \pi \int_0^\infty d\rho\, f(-\rho)
\end{aligned}$$

так что

$$\partial_z \ln z = \frac{1}{z} + \pi\theta(-z_{\mathrm{Re}})\delta(z_{\mathrm{Im}}), \qquad \overline{\partial_z} \ln \overline{z} = \frac{1}{\overline{z}} + \pi\theta(-z_{\mathrm{Re}})\delta(z_{\mathrm{Im}}), \tag{9.4}$$

где второе равеснтво есть комплексное сопряжение первого. Такой же выкладкой получаем, что

$$\partial_{\bar{z}} \ln z = -\pi\theta(-z_{\mathrm{Re}})\delta(z_{\mathrm{Im}}), \qquad \partial_z \ln \overline{z} = -\pi\theta(-z_{\mathrm{Re}})\delta(z_{\mathrm{Im}}). \tag{9.5}$$

Итак, мы видим, что $\partial_z \ln z \ne 1/z$ and $\partial_{\bar{z}} \ln z \ne 0$. С другой стороны

$$\partial_z \ln |z|^2 = \partial_z(\ln z + \ln \overline{z}) = \frac{1}{z} \tag{9.6}$$

так что в силу

$$\partial_{\bar{z}} \frac{1}{z} = \pi\delta(z).$$

получаем

$$\partial_z \overline{\partial_z} \ln |z| = \frac{\pi}{2}\delta(z). \tag{9.7}$$

Далее, по (9.2) уравнение

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) G(x, y) = \delta(x)\delta(y) \quad \text{эквивалентно} \quad \partial_z \overline{\partial_z} G = 4\delta(z)$$

что доказывает (8.10).

9.2. Преобразование Фурье функции r^λ. В случае нескольких переменных преобразование Фурье основных функций (как из $\mathscr{S}$, так и из $\mathscr{Z}$) определяется аналогично одномерному случаю:

$$\psi(k) \equiv F[\phi] = \int dx\, \phi(x) e^{i(k,x)}, \quad k = \{k_1, \ldots, k_n\}, \quad (k, x) = \sum_j k_j x_j. \tag{9.8}$$

Соответственно, преобразование Фурье обобщенной функции задается как

$$(F[f], \phi) = (f, F[\phi]), \tag{9.9}$$

где либо $f \in \mathscr{S}'$ и $\phi \in \mathscr{S}$, либо $f \in \mathscr{D}'$ и $\phi \in \mathscr{Z}$. Рассмотрим поведение преобразования Фурье при линейном преобразовании координат: $x = uy$, где u – $n \times n$ матрица преобразования. Соответственно, $y = u^{-1}x$, $dx = |u|dy$ и

$$F[\phi(u^{-1}x)](k) = \int dx\, \phi(u^{-1}x)e^{i(k,x)} = |u| \int dy\, \phi(y)e^{i(u'k,y)} = |u|F[\phi](u'k), \tag{9.10}$$

где u' – траспонированая матрица. Тогда для обобщенной функции f имеем:

$$\begin{aligned}\big(F[f(u^{-1}x)](k), \phi(k)\big) &= \big(f(u^{-1}x), F[\phi(k)](x)\big) = |u|\big(f(x), F[\phi(k)](ux)\big) = \big(f(x), F[\phi(u'^{-1}k)](x)\big) = \\ &= \big(F[f](k), \phi(u'^{-1}k)\big) = |u|\big(F[f](u'k), \phi(k)\big).\end{aligned} \tag{9.11}$$

В частности, если обобщенная функция сферически симметрична, $f(ux) = f(x)$, то и ее преобразование Фурье сферически симметрично.

Пример такой функции дает $f = r^\lambda$, которая определена при всех $\lambda \neq -n, -n-2, \ldots$ и сферически симметрична. Рассмотрим ее преобразование Фурье

$$g(k) = \int dx\, r^\lambda e^{i(k,x)}, \tag{9.12}$$

которое тоже симметрично, а интеграл сходится при $-n < \operatorname{Re}\lambda < 0$. Тогда он есть функция от $\rho = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_n^2}$. Кроме того для любого $t > 0$ имеем $g(tk) = t^{-\lambda-n}g(t)$, так что $g(k)$ есть однородная функция указанной степени, а потому $g(k) = C\rho^{-\lambda-n}$ и остается найти только константу C. Положим $\phi(k) = e^{-\rho^2/2}$. Тогда $F[e^{-\rho^2/2}] = (2\pi)^{n/2}e^{-r^2/2}$, так что

$$\frac{C}{(2\pi)^{n/2}} \int dk\, \rho^{-n-\lambda}e^{-\rho^2/2} = \int dx\, r^\lambda e^{-r^2/2}.$$

Переходя в обоих частях к сферическим координатам и деля на площадь единичной сферы получаем:

$$\frac{C}{(2\pi)^{n/2}} \int d\rho\, \rho^{-\lambda-1}e^{-\rho^2/2} = \int dr\, r^{n+\lambda-1}e^{-r^2/2},$$

так что интегралы вычисляются посредством гамма-функции:

$$\int d\rho\, \rho^{-\lambda-1}e^{-\rho^2/2} = 2^{-\lambda/2-1}\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\int dr\, r^{\lambda+n-1}e^{-r^2/2} = 2^{\lambda/2+n/2-1}\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right),$$

так что

$$C = 2^{\lambda+n}\pi^{n/2}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}.$$

Окончательно:

$$F[r^\lambda] = 2^{\lambda+n}\pi^{n/2}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\rho^{-\lambda-n}. \tag{9.13}$$

Это равенство выведено при $-n < \operatorname{Re}\lambda < 0$, однако его можно продолжить аналитически на все λ не равные $-n, -n-2, \ldots$. В частности при $\lambda = 2-n$ получаем

$$F\left[\frac{1}{r^{n-2}}\right] = \frac{4\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\rho^2}, \tag{9.14}$$

что в силу (8.8) дает фурье-образ фундаментального решения уравнения Лапласа:

$$F[G](k) = -\frac{1}{\rho^2}. \tag{9.15}$$

Литература к лекции 9: И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”; В.С.Владимиров , В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”,

10. Лекция 10

10.1. **Характеристические функции и формулы Грина.** Рассмотрим применение обобщенных функций для доказательства классических результатов, относящихся к обычным, гладким функциям на примере вывода формулы Грина. Для простоты мы рассмотрим здесь пространство $\mathbb{R}^3$, хотя аналогичное доказательство, конечно, справедливо и в $\mathbb{R}^n$. Пусть имеется ограниченная область D с гладкой, дифференцируемой границей ∂D. Определим в $\mathbb{R}^3$ функцию $P(x)$ как расстояние точки x до ∂D когда $x \in D$ и $-$расстояние, когда $x \notin D$. Таким образом равенство $P(x) = 0$ есть уравнение границы области. Все предположения гладкости и ограниченности области также сделаны здесь для простоты доказательства. Пусть теперь имеются две гладкие, дважды непрерувно дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$, заданные на $D \cup \partial D$. Рассмотрим интеграл по области D:

$$I = \int\limits_D dx^3 \big(u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\big), \tag{10.1}$$

где Δ – оператор Лапласа. В силу сказанного

$$I = \int\limits_{P(x)>0} dx^3 \big(u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\big) = \int dx^3 \theta\big(P(x)\big)\big(u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\big),$$

где θ – функция Хевисайда своего аргумента. Учитывая, что $\Delta = \nabla^2$, где ∇ означает градиент, запишем

$$I = \int dx^3 \theta\big(P(x)\big)\nabla\big(u(x)\nabla v(x) - v(x)\nabla u(x)\big) =$$
$$- \int dx^3 \big(\nabla\theta(P(x))\big)\big(u(x)\nabla v(x) - v(x)\nabla u(x)\big). \tag{10.2}$$

Дифферецируя $\theta(P(x))$ как сложную функцию, получаем

$$\nabla\theta(P(x)) = \delta(P(x))\nabla P(x), \tag{10.3}$$

а на поверхности $P(x) = 0$ градиент $P(x)$ есть единичный вектор нормали n_{in}, направленный внутрь области. В результате получаем формулу Грина:

$$\int\limits_D dx^3 \big(u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\big) = \int\limits_{\partial D} dS \left(v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n_{\text{in}}} - u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial n_{\text{in}}}\right), \tag{10.4}$$

которую обычно записывают, используя внешнюю нормаль n:

$$\int\limits_D dx^3 \big(u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\big) = \int\limits_{\partial D} dS \left(u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial n} - v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right). \tag{10.5}$$

10.2. **Потенциалы простого и двойного слоя.** Потенциалы простого и двойного слоя определяются как решения уравнения Пуассона (уравнения Лапласа с заданной правой частью)

$$\Delta\phi(x) = -2\pi\rho(x), \tag{10.6}$$

где $\rho(x)$ – источник, который в соответствии с (7.1) и (7.5) равен

$$\rho(x) = \mu\delta_{\partial D}, \tag{10.7}$$

$$\rho(x) = -\frac{\partial\nu\delta_{\partial D}}{\partial\vec{n}}. \tag{10.8}$$

В силу (8.8) фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$ дается как

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{2\pi r}, \tag{10.9}$$

поэтому потенциалы простого и двойного слоя определяются как свертка:

$$\phi(x) = \int dy \frac{\rho(y)}{|x-y|},$$

т.е.

$$\text{простой слой:}\quad \phi(x)=\int_{\partial D} dS(y)\frac{\mu(y)}{|x-y|}, \tag{10.10}$$

$$\text{двойной слой:}\quad \phi(x)=\int_{\partial D} dS(y)\nu(y)\frac{\partial}{\partial n(y)}\frac{1}{|x-y|}, \tag{10.11}$$

где $n(y)$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂D в точке y.

Пример 1. Потенциал равномерно заряженной сферы. Пусть D – сфера единичного радиуса, равномерно заряженная по окружности: $\mu(x)=\mu$. Тогда потенциал простого слоя дается как

$$\phi(x)=\mu\int\limits_0^{2\pi} d\alpha\int\limits_0^{\pi} d\beta\sin\beta\frac{1}{\sqrt{r^2-2r\cos\beta+1}},$$

где мы выбрали систему координат, в которой ось z направлена по x. Соответственно, β – угол векторов x и y, а r – длина вектора x. Тогда

$$\phi(x)=\frac{2\pi}{r}\big(\sqrt{(r+1)^2}-\sqrt{(r-1)^2}\big)=4\pi\begin{cases}1, & r\le 1\\ \dfrac{1}{r}, & r\ge 1\end{cases} \tag{10.12}$$

10.3. **Гармонические функции и задачи Дирихле и Неймана.** Вернемся к формуле Грина (10.5):

$$\int\limits_D d^3y\big(u(y)\Delta v(y)-v(y)\Delta u(y)\big)=\int\limits_{\partial D} dS\left(u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial n}-v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial n}\right). \tag{10.13}$$

Пусть $x\in D$ – некоторая фиксированная точка. Положим здесь $v(y)=1/|x-y|$ и воспользуемся по (8.8) и (8.9) тем, что $\Delta(1/|x|)=-4\pi\delta(x)$. Тогда для любой гладкой, дважды дифференцируемой вплоть до границы D функции $u(x)$ получаем

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial D} dS(y)\left(\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}-u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\right)-\frac{1}{4\pi}\int\limits_D d^3y\frac{\Delta u(y)}{|x-y|}, \tag{10.14}$$

где n_y – внешняя нормаль к поверхности ∂D в точке y. Заметим, что если точка x лежит вне D, то выражение в правой части равно нулю, поскольку там $1/|x-y|$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Определение 10.1. *Функция, непрерывная вместе со своими производными до второго порядка в некоторой (трехмерной) области D и удовлетворяющая там уравнению Лапласа, называется гармонической в D функцией.*

Таким образом, в силу (10.14), гармоническая функция выражается через значения на границе ее самой и ее нормальной производной посредством

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial D} dS(y)\left(\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}-u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\right). \tag{10.15}$$

Отметим еще одно следствие формулы Грина (10.13). Полагая в ней $v\equiv 1$ и считая u гармонической функцией, находим:

$$\int\limits_{\partial D} dS(y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}=0. \tag{10.16}$$

Полученные свойства гармонических функций позволяют описать решения двух классических задач математической физики: найти функцию гармоническую в области D такую, что на границе области выполнено условие

$$u(x)\big|_{\partial D}=g(x)\quad \text{– задача Дирихле, или первая краевая задача,} \tag{10.17}$$

или

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right|_{\partial D} = \widetilde{g}(x) \quad \text{– задача Неймана, или вторая краевая задача.} \tag{10.18}$$

Мы не будем останавливаться здесь на разрешимости этих задач, отметим только, что для разрешимости задачи Неймана необходимо в силу (10.16) потребовать:

$$\int\limits_{\partial D} dS(y)\widetilde{g}(y) = 0, \tag{10.19}$$

что будем считать выполненным. Если ставится задача найти функцию гармоническую вне D, то такие задачи называются внешними, в отличие от предыдущих, внутренних. Приведем кратко решение этих задач. Оно основано на замечании, что для гармонической функции можно вывести аналог равенства (10.15) с произвольной функцией Грина оператора Лапласа:

$$\text{если} \quad \Delta_y G(x,y) = \delta(x-y), \quad \text{то} \quad u(x) = \int\limits_{\partial D} dS(y)\left(u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} - G(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right), \tag{10.20}$$

где Δ_y – оператор Лапласа по переменной y. Таким образом решение задач сводится к занулению либо первого, либо второго членов, соответственно. Рассмотрим задачу Дирихле. Пусть $w(x,y)$ – функция гармоническая по y в D, решающая задачу Дирихле

$$\left. w(x,y) - \frac{1}{4\pi|x-y|}\right|_{y\in\partial D} = 0. \tag{10.21}$$

Положим

$$G(x,y) = w(x,y) - \frac{1}{4\pi|x-y|}, \tag{10.22}$$

тогда $G(x,y)|_{y\in\partial D} = 0$ и по (10.20) решение задачи Дирихле дается как

$$u(x) = \int\limits_{\partial D} dS(y)\, g(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}. \tag{10.23}$$

Рассмотрим теперь задачу Неймана. Здесь нам следует найти специальное решение, $\widetilde{w}(x,y)$, этой задачи по переменной y с граничным условием

$$\left.\frac{\partial \widetilde{w}(x,y)}{\partial n_y}\right|_{y\in\partial D} = \left.\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\right|_{y\in\partial D} + K, \tag{10.24}$$

где K – константа. Для ее определения вспомним, что функция $w(x,y)$ необходимым условием разрешимости задачи Неймана для функции $\widetilde{w}(x,y)$ является выполнение для нее условия (10.16). Заметим, что по (10.15) при $u \equiv 1$ мы имеем для $\forall x \in D$:

$$\frac{-1}{4\pi}\int\limits_{\partial D} dS(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|} = 1, \tag{10.25}$$

что, в частности, не зависит от x. С учетом того, что мы рассматриваемая область D конечна и имеет гладкую границу, мы видим, что $K = 1/S$, где S – площадь поверхности области D. Теперь функция Грина задается как

$$\widetilde{G}(x,y) = \widetilde{w}(x,y) - \frac{1}{4\pi|x-y|}. \tag{10.26}$$

Она удовлетворяет теперь условию

$$\left.\frac{\partial \widetilde{G}(x,y)}{\partial n_y}\right|_{y\in\partial D} = K, \tag{10.27}$$

так что по (10.20) решение задачи Неймана дается как

$$u(x) = K\int_{\partial D} dS(y)u(y) - \int\limits_{\partial D} dS(y)G(x,y)\widetilde{g}(y),$$

однако первое слагаемое в правой части – константа, а по самой постановке задачи Неймана ее решение может быть определено только с точностью до константы. Поэтому это слагаемое можно опустить и мы получаем окончательно представление для решения задачи Неймана в виде:

$$u(x) = -\int\limits_{\partial D} dS(y)G(x,y)\widetilde{g}(y). \tag{10.28}$$

Литература к лекции 10: И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”; В.С.Владимиров, В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”, В.И.Смирнов “Курс высшей математики том II, гл. 7 и том IV, часть 2, гл. 2.

11. Лекция 11

11.1. Уравнение скалярного поля с источником. Рассмотрим уравнение на функцию $\phi(t;x_1,\dots,x_n)$ вида

$$\big(\partial_t^2-(\partial_{x_1}^2+\dots+\partial_{x_n}^2)+m^2\big)\phi(t;x_1,\dots,x_n)=j(t;x_1,\dots,x_n), \tag{11.1}$$

где m - положительный параметр (масса скалярного поля), $j(t;x_1,\dots,x_n)$ – заданная функция времени t и координат $x_1,\dots,x_n$ (внешний источник).

Решение этого линейного по полю $\phi(t;x_1,\dots,x_n)$ уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned}\phi(t;x_1,\dots,x_n)=\phi^0(t;x_1,\dots,x_n)+&\\ +\int \mathrm{d}\tau\int \mathrm{d}y_1\dots\mathrm{d}y_n\mathcal{E}(t,\tau;x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)j(\tau;y_1,\dots,y_n),&\end{aligned}$$

здесь $\phi^0(t;x_1,\dots,x_n)$ – решение уравнения (11.1) с правой частью, равной нулю, $\mathcal{E}(t,\tau;x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)$ – фундаментальное решение уравнения

$$\begin{aligned}\big(\partial_t^2-(\partial_{x_1}^2+\dots+\partial_{x_n}^2)+m^2\big)\mathcal{E}(t,\tau;x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)=&\\ =\delta(t-\tau)\delta(x_1-y_1)\dots\delta(x_n-y_n).&\end{aligned}$$

Если на поставленную задачу наложить специальные условия, фиксирующие произвол, связанный с выбором решения однородного уравнения, то решение можно представить в виде

$$\phi(t;x_1,\dots,x_n)=\int \mathrm{d}\tau\int \mathrm{d}y_1\dots\mathrm{d}y_n\mathcal{D}(t,\tau;x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)j(\tau;y_1,\dots,y_n), \tag{11.2}$$

где $\mathcal{D}(t,\tau;x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)$ - функция Грина рассмотренного уравнения с условиями, фиксирующими произвол.

Само рассмотренное уравнение инвариантно относительно однородного сдвига по времени и пространству, если этой же инвариантностью обладают наложенные условия, то (подумайте как доказать)

$$\mathcal{D}(t,\tau;x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)=\mathcal{D}(t-\tau;x_1-y_1,\dots,x_n-y_n). \tag{11.3}$$

В этом случае нужно решать более простое уравнение

$$\big(\partial_t^2-(\partial_{x_1}^2+\dots+\partial_{x_n}^2)+m^2\big)\mathcal{D}(t;x_1,\dots,x_n)=\delta(t)\delta(x_1)\dots\delta(x_n). \tag{11.4}$$

Решим это уравнение методом преобразования Фурье. Ищем решение в виде

$$\mathcal{D}(t;x_1,\dots,x_n)=\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}k_1\dots\mathrm{d}k_n}{(2\pi)^n}\mathcal{D}(\omega;k_1,\dots,k_n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}k_1x_1+\dots+\mathrm{i}k_nx_n}.$$

Для $\mathcal{D}(\omega;k_1,\dots,k_n)$ получаем алгебраическое уравнение, которое следует решать в $\mathcal{S}'$

$$(\omega-\epsilon_k)(\omega+\epsilon_k)\mathcal{D}(\omega;k_1,\dots,k_n)=-1,\quad \epsilon_k=\sqrt{m^2+k^2}, \tag{11.5}$$

где $k^2=k_1^2+\dots+k_n^2$.

Решение этого уравнения в $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{D}(\omega;k_1,\dots,k_n)=\frac{1}{2\epsilon_k}\mathrm{P}\frac{1}{\omega+\epsilon_k}-\frac{1}{2\epsilon_k}\mathrm{P}\frac{1}{\omega-\epsilon_k}+C_1(k)\delta(\omega-\epsilon_k)+C_2(k)\delta(\omega+\epsilon_k). \tag{11.6}$$

Представим обобщенные функции, фигурирующие в ответе, в виде пределов функций, аналитических либо в верхней, либо в нижней полуплоскостях комплексной переменной ω

$$\mathrm{P}\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z+\mathrm{i}0}+\frac{1}{z-\mathrm{i}0}\Big),$$

$$\delta(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\Big(\frac{1}{z-\mathrm{i}0}-\frac{1}{z+\mathrm{i}0}\Big).$$

Теперь ответ для фурье-образа функции Грина можно представить в виде

$$\mathcal{D}(\omega; k_1, \ldots, k_n) =$$
$$\frac{1}{\omega - \epsilon_k + \mathrm{i}0}\Big[-\frac{1}{4\epsilon_k} - \frac{C_1(k)}{2\mathrm{i}\pi}\Big] + \frac{1}{\omega - \epsilon_k - \mathrm{i}0}\Big[-\frac{1}{4\epsilon_k} + \frac{C_1(k)}{2\mathrm{i}\pi}\Big] +$$
$$\frac{1}{\omega + \epsilon_k + \mathrm{i}0}\Big[\frac{1}{4\epsilon_k} - \frac{C_2(k)}{2\mathrm{i}\pi}\Big] + \frac{1}{\omega + \epsilon_k - \mathrm{i}0}\Big[\frac{1}{4\epsilon_k} + \frac{C_2(k)}{2\mathrm{i}\pi}\Big].$$

11.2. **Запаздывающая функция Грина.** Функция Грина называется запаздывающей, если значение поля $\phi(t; x_1, \ldots, x_n)$ в момент времени t определяется значениями источника $j(\tau; y_1, \ldots, y_n)$ только в моменты времени τ, предшествующие времени t (принцип причинности). Это означает, что

$$\mathcal{D}^R(t, \tau; x_1, y_1 \ldots, x_n, y_n) = 0 \quad \text{при} \quad \tau > t. \tag{11.7}$$

Это условие инвариантно относительно сдвигов по времени, поэтому для рассматриваемого уравнения

$$\mathcal{D}^R(t; x_1 \ldots, x_n) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{11.8}$$

Рассмотрим фурье-образ запаздывающей функции Грина

$$\mathcal{D}^R(\omega; k_1 \ldots, k_n) = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \mathcal{D}^R(t; x_1 \ldots, x_n) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}k_1 x_1 - \cdots - \mathrm{i}k_n x_n} =$$
$$\int_0^\infty \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \mathcal{D}^R(t; x_1 \ldots, x_n) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}k_1 x_1 - \cdots - \mathrm{i}k_n x_n}.$$

Посмотрим на фурье-образ функции Грина как на функцию комплексной частоты $\omega = \omega_1 + \mathrm{i}\omega_2$. Из приведенного выражения видно, что при $\omega_2 > 0$ интеграл по времени сходится и, следовательно, $\mathcal{D}^R(\omega; k_1 \ldots, k_n)$ - *аналитична в верхней полуплоскости частоты*, как функции комплексной переменной.
Отсюда сразу же следует, что в общей формуле для фурье-образа функции Грина следует занулить второй и четвертый члены:

$$C_1(k) = \frac{\mathrm{i}\pi}{2\epsilon_k}, \quad C_2(k) = -\frac{\mathrm{i}\pi}{2\epsilon_k}.$$

И, следовательно,

$$\mathcal{D}^R(\omega; k_1 \ldots, k_n) = -\frac{1}{(\omega + \mathrm{i}0)^2 - \epsilon_k^2}. \tag{11.9}$$

11.3. **Опережающая функция Грина.** Функция Грина называется опережающей, если значение поля $\phi(t; x_1, \ldots, x_n)$ в момент времени t определяется значениями источника $j(\tau; y_1, \ldots, y_n)$ только в моменты времени τ, последующими за временем t . Это означает, что

$$\mathcal{D}^A(t, \tau; x_1, y_1 \ldots, x_n, y_n) = 0 \quad \text{при} \quad \tau < t. \tag{11.10}$$

Повторяя рассуждения, аналогичные проведенным для запаздывающей функции Грина, убеждаемся, что *опережающая функция Грина аналитична в нижней полуплоскости комплексной частоты.* В этом случае

$$C_1(k) = -\frac{\mathrm{i}\pi}{2\epsilon_k}, \quad C_2(k) = \frac{\mathrm{i}\pi}{2\epsilon_k},$$

и, таким образом,

$$\mathcal{D}^A(\omega; k_1 \ldots, k_n) = -\frac{1}{(\omega - \mathrm{i}0)^2 - \epsilon_k^2}. \tag{11.11}$$

11.4. **Причинная функция Грина.** Определим причинную (или фейнмановскую) функцию Грина через аналитические свойства ее фурье-образа по частоте. Пусть для причинной функции Грина полюс с положительной действительной частью лежит в нижней полуплоскости комплексной частоты (как для запаздывающей функции Грина), а полюс с отрицательной действительной частью - в верхней полуплоскости комплексной частоты (как для опережающей фукции Грина).

Это означает, что

$$C_1(k) = C_2(k) = \frac{\mathrm{i}\pi}{2\epsilon_k},$$

и, окончательно,

$$\mathcal{D}^F(\omega; k_1 \ldots, k_n) = -\frac{1}{\omega^2 - \epsilon_k^2 + \mathrm{i}0}. \tag{11.12}$$

11.5. **Запаздывающий потенциал.** При решении уравнения на электромагнитный потенциал, создаваемый движущимися зарядами, нам следует решить одно из уравнений Максвелла:

$$\Box\phi(x) = 4\pi\rho(x). \tag{11.13}$$

где $\rho(x)$ – плотность зарядов, $x = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ – четырех-вектор, $\Box = \partial_{x^0}^2 - \Delta$ – оператор Даламбера. При этом нам требуется не общее решение, а лишь то, в котором решение в точке x зависит от поведения зарядов только в прошлом, т.е. от его поведения при тех y, которые удовлетворяют условию $x^0 > y^0$. Такая функция Грина называется запаздывающей и дается своим преобразованием Фурье (подробнее см. предыдущие разделы, $m = 0$, $n = 3$)

$$D^{\mathrm{ret}}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{-ikx}}{(k^0 + i0)^2 - \vec{k}^2}. \tag{11.14}$$

В терминах обобщенных функций данный интеграл может быть вычислен явно. Проинтегрируем его по k^0, замыкая контур интегрирования при $x_0 > 0$ в нижней полуплоскости:

$$D^{\mathrm{ret}}(x) = \frac{i\theta(x^0)}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{\vec{k}^2}}\left(e^{-i(\sqrt{\vec{k}^2}x^0 - \vec{k}\vec{x})} - e^{-i(\sqrt{\vec{k}^2}x^0 - \vec{k}\vec{x})}\right).$$

Полагая здесь $r = \sqrt{\vec{x}^2}$, переходя к сферическим координатам и интегрируя по угловым переменным, мы получаем:

$$D^{\mathrm{ret}}(x) = \frac{\theta(x^0)}{2(2\pi)^2 r}\int\limits_0^\infty d\rho\big(e^{-i\rho(x^0 - r)} - e^{-i\rho(x^0 + r)} - e^{i\rho(x^0 + r)} + e^{i\rho(x^0 - r)}\big),$$

или

$$D^{\mathrm{ret}}(x) = \frac{\theta(x^0)}{2(2\pi)^2 r}\int\limits_{-\infty}^\infty d\rho\big(e^{-i\rho(x^0 - r)} - e^{i\rho(x^0 + r)}\big) = \frac{\theta(x^0)}{4\pi r}\big(\delta(x^0 - r) - \delta(x^0 + r)\big).$$

Ввиду $\theta(x^0)$ и определения r вторая дельта-функция выпадает. Замечая, что $\theta(x^0)\delta(x^2) = \dfrac{\delta(x^0 - r)}{2r}$, получаем:

$$D^{\mathrm{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi}\theta(x^0)\delta(x^2). \tag{11.15}$$

Таким образом, решение уравнения (11.13) дается как

$$\phi(x) = \int d^3\vec{y}\, \frac{\rho\big(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y}\big)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \tag{11.16}$$

Если заряд e движется по заданной траектории $\vec{q}(t)$, то соответствующий потенциал называется потенциалом Льенара–Вихерта.

12. Лекция 12

12.1. **Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма.** Интегральными называются уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла. Мы рассматриваем здесь только линейные уравнения. Заметим, что в интегральном виде может быть записано и дифференциальное уравнение. Пусть, например, имеется дифференциальный оператор $L_x = \sum_{n=0}^{N} a_n(x)\partial_x^n$, где вообще говоря, x и t – мультипеременные. Тогда каждое линейное дифференциальное уравнение $L_x\phi(x) = g(x)$ можно тождественно записать как $\int dyL(x,y)\phi(y) = f(x)$, где $L(x,y) = L_x\delta(x-y)$ – ядро интегрального оператора. Однако более полезно переходить к интегральным операторам в ситуации начальных или краевых задач. Пусть нам следует решить линейное дифференциальное уравнение с линейными граничными условиями в некоторой области Ω. Предположим, что оператор естественно представляется как сумма двух операторов: $L_x = L_{0,x} + U(x)$, где L_x – дифференциальная часть с постоянными коэффициентами, а $U(x)$ – оператор умножения. Это условие на L не обязательно, важно, что $L_{0,x}$ выбирается так, чтобы его функция Грина в области Ω

$$L_{0,x}G(x,y) = \delta(x-y) \tag{12.1}$$

либо строилась явно, либо чтобы ее свойства могли быть детально исследованы. Тогда решение рассматриваемого дифференциального уравнения сводится к интегральному уравнению

$$\phi(x) = \int_\Omega dy\, G(x,y)U(y)\phi(y) + f(x), \tag{12.2}$$

где

$$f(x) = \int_\Omega dy\, G(x,y)g(y) + r(x) \tag{12.3}$$

и $r(x)$ – вклад от неоднородных граничных условий. Для простоты будем говорить только об одномерном случае, хотя вся конструкция непосредственно переносится и на произвольное $\mathbb{R}^n$.

Основные определения. Линейным интегральным уравнением 2-го рода, или интегральным уравнением Фредгольма называется уравнение на функцию $\phi(x)$ вида

$$\phi(x) = \int_a^b dy\, K(x,y)\phi(y) + f(x), \tag{12.4}$$

а если $f(x) \equiv 0$, то такое уравнение называется однородным. Линейное интегральное уравнение вида

$$\int_a^b dy\, K(x,y)\phi(y) = f(x), \tag{12.5}$$

называется интегральным уравнением 1-го рода. Функция $K(x,y)$ называется ядром интегрального уравнения. Опять же для простоты мы рассматриваем здесь случай конечности интрвала интегрирования, а все функции будем полагать абсолютно интегрируемыми.

Если ядро интегрального оператора обращается в ноль при $y > x$, то соответствующие уравнения называются уравнениями Вольтерра, соответственно, 1-го и 2-го рода:

$$\int_a^x dy\, K(x,y)\phi(y) = f(x), \tag{12.6}$$

$$\phi(x) = \int_a^x dy\, K(x,y)\phi(y) + f(x). \tag{12.7}$$

Теоремы Фредгольма.

Теорема 12.1. *(Альтернатива Фредгольма.) Или данное неоднородное линейное интегральное уравнение 2-го рода (12.4) имеет, и при том единственное, решение при всякой функции $f(x)$ (из некоторого достаточно широкого класса), или соответствующее однородное уравнение имеет по крайней мере одно нетривиальное, т.е. не равное тождественно нулю решение.*

Теорема 12.2. *Если для данного уравнения (12.4) имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для транспонированного уравнения*

$$z(x) = \int_a^b dy\, K(y,x) z(y) + \widetilde{f}(x).$$

Исходное однородное интегральное уравнение и транспонированное к нему имеют одно и тоже конечное число линейно независимых решений.

Заметим, что если однородное уравнение имеет несколько решений, то и любая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами также является решением.

Теорема 12.3. *Во втором случае альтернативы необходимым и достаточным условием существования решения неоднородного уравнения (12.4) является условие*

$$\int_a^b dx\, f(x) z(x) = 0,$$

где $z(x)$ – любое решение однородного уравнения, транспонированного к (12.4).

Схема доказательства теоремы Фредгольма для достаточно малых непрерывных ядер. Теоремы Фредгольма справедливы в случае любых непрерывных ядер. Здесь мы рассмотрим доказательство разрешимости уравнения

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b dy\, K(x,y)\phi(y) + f(x), \tag{12.8}$$

где в отличии от (12.4) мы ввели комплексный параметр λ, называемый спектральным параметром. Будем искать решение этого интегрального уравнения в виде ряда по λ:

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \lambda\phi_1(x) + \lambda^2\phi_2(x) + \dots. \tag{12.9}$$

Подставляя формально этот ряд в (12.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ (метод последовательных приоближений), получаем бесконечную систему

$$\phi_0 = f, \qquad \phi_{k+1} = K\phi_k, \quad k = 0,1,2,\dots \tag{12.10}$$

где мы опустили явную зависимость от координат, а K означает интегральный оператор с ядром $K(x,y)$. Таким образом

$$\phi_k = K^k f, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{12.11}$$

где K^2, т.е. $K^2(x,y) = \int_a^b dz\, K(x,z)K(z,y)$ и так далее, а $K^0 = I$, т.е. $K^0(x,y) = \delta(x-y)$. Ввиду равномерной непрерывности K также равномерно непрерывны и все его итерации K^k, а потому и все $\phi_k(x)$. ввиду равномерной непрерывности ядро ограничено: $|K(x,y)| \le M$, $|K^k(x,y)| \le M^k(b-a)^{k-1}$. Но по (12.11) тогда

$$|\phi_k(x)| \le M^k(b-a)^k F, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{12.12}$$

где F означает максимум функции $f(x)$ на заданном интервале (при $k=0$ равенство (12.12) очевидно). Итак ряд (12.8) сходится абсолютно и равномерно по x на интервале (a,b), если

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}. \tag{12.13}$$

Сумма этого ряда есть непрерывная функция x, ряд сходится равномерно, что оправдывает сделанную формальную подстановку и доказывает, что $\phi(x)$ есть искомое решение (12.8). Это решение единственно в классе ограниченных функций. Действительно, пусть существует еще какое-то решение $\widetilde{\phi}(x)$ и пусть $\widetilde{\widetilde{\phi}}(x) = \phi(x) - \widetilde{\phi}(x)$, что тогда есть решение однородного уравнения. Пусть Φ означает верхнюю грань $|\phi(x) - \widetilde{\phi}(x)|$ на $[a, b]$. Тогда, оценивая левую и правую части однородного уравнения, имеем:

$$\Phi \leq |\lambda| M(b-a)\Phi < \Phi, \tag{12.14}$$

где мы воспользовались (12.13) в последнем неравенстве, которое и доказывает, что $\Phi = 0$.

12.2. **Интегральные уравнения с вырожденными ядрами.** Это уравнения с ядрами вида

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{N} \psi_n(x) \widetilde{\psi}_n(y), \tag{12.15}$$

где мы полагаем, что все функции ψ_n и $\widetilde{\psi}_n$ равномерно непрерывны на $[a, b]$ и линейно независимы (это условие без потери общности). Подстановка этого равенства в (12.4) дает

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{N} \psi_n(x) \int_a^b dy\, \widetilde{\psi}_n(y)\phi(y) + f(x), \tag{12.16}$$

что означает, что разность $\phi - f$ разлагается по функциям ψ_n:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n \psi_n(x) + f(x). \tag{12.17}$$

Здесь

$$C_n = \int_a^b dy\, \widetilde{\psi}_n(y)\phi(y), \tag{12.18}$$

а подстановка (12.17) в (12.16) дает систему линейных уравнений:

$$C_n = \sum_{l=1}^{N} M_{nl} + f_n, \tag{12.19}$$

$$M_{nl} = \int_a^b dy\, \widetilde{\psi}_n(y)\psi_l(y), \qquad f_n = \int_a^b dy\, \widetilde{\psi}_n(y) f(y). \tag{12.20}$$

Итак нужно решить задачу вида $(I - M)C = f$, где C и f – N-вектора, а I – единичная матрица. Если $\det(I - M) \neq 0$, то решение существует и единственно. Если $\det(I - M) = 0$, то матрица необратима и (12.19) разрешимо не для всех f. Для разрешимости следует найти решения сопряженной (транспонированной!) однородной задачи:

$$\widetilde{C}(I - M) = 0, \tag{12.21}$$

где $\widetilde{C}$ – строка. Если q – ранг матрицы $I - M$, то число линейно независимых решений этого уравнения равно $N - q$, обозначим их $\widetilde{C}^r$. Тогда необходимое и достаточное условие разрешимости задачи $(I - M)C = f$ есть условие ортогональности f ко всем решениям (12.21) :

$$\widetilde{C}^r f = 0. \tag{12.22}$$

Это рассмотрение доказывает теоремы Фредгольма в случае вырожденных ядер.

12.3. **Уравнения Вольтерра.** Мы рассмотрим только одномерный случай и конечный интервал:

$$\phi(x) = \lambda \int_0^x dy\, K(x,y)\phi(y) + f(x), \tag{12.23}$$

и покажем, что при условии, что $K(x,y)$ – непрерывная функция при $0 \le x \le a$ и $0 \le y \le x$, а $f(x)$ непрерывна при $0 \le x \le a$ для этого уравнения имеет место первый случай альернативы Фредгольма, иными словами у уравнения Вольтерра нет собственных значений.

Схема доказательства. Поскольку для данного уравнения справедливы все три теоремы фредгольма, то достаточно доказать, что при любом λ однородное уравнение

$$\phi(x) = \lambda \int_0^x dy\, K(x,y)\phi(y) \tag{12.24}$$

имеет только тривиальное решение в классе непрерывных функций от x при $0 \le x \le a$. Пусть $B = \max|\phi(x)|$ при $0 \le x \le a$, а $M = \max|K(x,y)|$ при $0 \le x \le a$ и $0 \le y \le x$. Тогда по (12.24) $\phi(x)| \le |\lambda| MBx$. Подставим эту оценку в правую часть того же (12.24): $\phi(x)| \le |\lambda|^2 M^2 Bx^2/2$. Продолжая этот процесс, получим

$$\phi(x)| \le \frac{|\lambda|^k M^k B x^k}{k!} \le \frac{|\lambda|^k M^k B a^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{12.25}$$

Но правая часть стремится к нулю при $k \to \infty$, что и доказывает, что на интервале $(0,a)$ функция $\phi(x) \equiv 0$.■

12.4. **Теорема Гильберта–Шмидта.** Пусть ядро эрмитово (в вещественном случае – симметрично) $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ и интегрируемо по модулю в квадрате:

$$\int_a^b dx \int_a^b dy\, |K(x,y)|^2 < \infty. \tag{12.26}$$

Рассмотрим задачу на собственные значения для интегрального оператора с таким ядром:

$$\lambda \int_a^b dy\, K(x,y)\psi(y) = \psi(y). \tag{12.27}$$

Можно доказать, что данное уравнение всегда имеет по крайней мере одно собственное значение и собственную функцию, хотя в общем случае их может быть счетное число. Все собственные значения вещественны, а собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям ортогональны. Соответственно, система собственных функций ортонормирована. Более того, для таких ядер справедлива

Теорема 12.4 (Теорема Гильберта–Шмидта)**.** *Если функция $f(x)$ представима посредством ядра $K(x,y)$ как*

$$f(x) = \int_a^b dy\, K(x,y) g(y), \tag{12.28}$$

где функция $g(x)$ квадратично интегрируема на рассматриваемом интервале, то $f(x)$ может быть разложена в ряд по собственным функциям $\psi_n(x)$ интегрального оператора K, $(I - \lambda_n K)\psi_n = 0$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n(x), \tag{12.29}$$

в ряд, который сходится абсолютно и равномерно.

Соответственно, для самого ядра имеем представление

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)\overline{\psi_n(y)}}{\lambda_n}. \tag{12.30}$$

Литература к лекции 12: И.Г.Петровский “Лекции по теории интегральных уравнений".