В. В. Лосяков, А. К. Погребков, С. М. Хорошкин

Прикладные методы анализа

Высшая школа экономики
1-й семестр 2014/2015 гг.

Содержание

1. Лекция 1. Преобразование Лапласа

1.1. **Введение.** Оливер Хевисайд (англ. Oliver Heaviside, 18 мая, 1850 – 3 февраля, 1925) – английский ученый-самоучка, инженер, математик и физик. Впервые применил комплексные числа для изучения электрических цепей, разработал технику применения преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений, переформулировал уравнения Максвелла в терминах трехмерных векторов, напряженностей электрического и магнитного полей и электрической и магнитной индукций, и, независимо от других математиков, создал векторный анализ. Несмотря на то, что Хевисайд большую часть жизни был не в ладах с научным сообществом, его работы изменили облик математики и физики. В 1874 году он оставляет должность телеграфиста и занимается исследованиями частным порядком в доме своих родителей. В это время он разработал теорию линий передачи (также известную как "телеграфные уравнения"). Хевисайд математически доказал, что равномерно распределенная емкость телеграфной линии минимизирует одновременно затухание и искажение сигнала. Между 1880 и 1887 годами Оливер Хевисайд разрабатывал операционное исчисление (он ввел обозначение D для дифференциального оператора), метод решения дифференциальных уравнений с помощью сведения к обыкновенным алгебраическим уравнениям, который поначалу вызвал бурную полемику из-за отсутствия строгого обоснования. Тогда он произнёс известную фразу: "Математика есть наука экспериментальная, определения появляются последними". Это было ответом на критику за использование ещё не вполне определённых операторов. Функция Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \tag{1.1}$$

дает простейший пример обобщенной функции (неустранимый разрыв первого рода при $t = 0$).

Операционное исчисление $\equiv$ Операционный метод $\equiv$ Символическое исчисление

Набор формальных операций над символом $p = \dfrac{d}{dt}$, где t – независимая переменная.

$$\begin{aligned}
&x(t) = x\\
&x^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^n x, \qquad n = 0, 1, \ldots,\\
&Lx = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x \Leftrightarrow L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n\\
&\int_0^1 dt\, x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p} \cdot x
\end{aligned}$$

Область применения: решение начальных (краевых) задач для линейных дифференциальных (интегральных) уравнений.

Пример 1.1. *Решить начальную задачу:*

$$x'(t) - x(t) = 1, \qquad x(0) = 0.$$

Решение. $px - x = 1, \Rightarrow$

$$x = \frac{1}{p-1} \cdot 1 \equiv \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p}} \cdot 1$$

формально разлагаем в ряд:

$$\begin{aligned}
&x = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^n} + \ldots\right) \cdot 1\\
&\frac{1}{p} \cdot 1 \;\Leftrightarrow\; \int_0^t dt = t, \qquad \frac{1}{p^2} \cdot 1 \equiv \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} \cdot 1 \;\Leftrightarrow\; \int_0^t t\, dt = \frac{t^2}{2}, \text{ и т.д.}
\end{aligned}$$

так что

$$x(t) = t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots = e^t - 1,$$

что легко проверить и непосредственно.

Обоснование символического (операционного) метода дано Бромвичем и Карсоном в 20-ые годы XX-го столетия. Они связали этот метод с методом интегральных пробразований, точнее преобразования Лапласа (французский математик, физик, астроном, 1749–1827). При этом p оказывается комплексным числом $p = p_{\mathrm{Re}} + ip_{\mathrm{Im}}$.

Схема операционного метода. Требуется найти функцию $x(t)$ действительного переменного t из некоторого уравнения, содержащего производные и интегралы от нее.

1. Переходим к образу $X(p)$.
2. Уравнение на x переходит в алгебраическое уравнение на X.
3. Решаем это уравнение, находим $X(p)$
4. Переходим к оригиналу $x(t)$.

(аналогия с логарифмированием)

1.2. **Основные понятия и методы.**

Определение 1.1. ***Оригиналом*** *называется любая комплексная функция $f(t)$ вещественного аргумента t, удовлетворяющая условиям:*

(1) *$f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера всюду, кроме отдельных изолированных точек, где она имеет разрывы 1 рода (причем на каждом конечном интервале таких точек – конечное число), т.е., для каждого t, кроме указанных изолированных точек, найдутся такие положительные константы A, $a \leq 1$ и h_0, что выполнено*
$$|f(t+h) - f(t)| < A|h|^a$$
для всех h, $|h| < h_0$, где A, вообще говоря, может зависеть от t;

(2) *$f(t) = 0$ при $t < 0$;*

(3) *$f(t)$ растет не быстрее некоторой экспоненты, т.е., $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ для некоторого $M > 0$ и вещественного s_0, называемого показателем роста $f(t)$ (точнее,* inf*).*

Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3, то $f(t) = \theta(t)\varphi(t)$ удовлетворяет всем трем условиям.

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется функция комплексного переменного p (изображение)

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{1.2}$$

Функция $\theta(t)$ – простейший пример оригинала (часто называется единичной функцией). Вообще ее часто опускают, всегда в этом методе подразумевая выполнение условия 2.

Определение 1.2. *Изображением функции $f(t)$ (по Лапласу) называют функцию комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемую соотношением (1.2). Фраза "функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$" записывается как $f(t) \doteqdot F(p)$ или $F(p) \doteqdot f(t)$.*

(Преобразование Хевисайда содержит лишний множитель p.)

Теорема 1.1. *Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$, и является в этой полуплоскости аналитической функцией p.*

Доказательство следует из оценки по свойству 3:
$$\left|\int_0^\infty dt\, f(t)e^{-pt}\right| \leq M\int_0^\infty dt\, e^{-(s-s_0)t} = \frac{M}{s-s_0},$$
так что в указанной области интеграл абсолютно сходится. Кроме того в любой полуплоскости $\mathrm{Re}\, p \geq s_1 > s_0$
$$\left|\int_0^\infty dt\, tf(t)e^{-pt}\right| \leq M\int_0^\infty dt\, te^{-(s-s_0)t} = \frac{M}{(s_1-s_0)^2}.$$

Поэтому в любой полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0$ интеграл, получающийся дифференцированием по p, сходится равномерно, ибо он также мажорируется сходящимся интегралом, не зависящим от p. Итак, функция $F(p)$ в любой точке полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > s_0$ обладает производной. Часто мы будем рассматривать аналитическое продолжение изображений левее прямой $\mathrm{Re}\, p = s_0$. Если точка p стремится к бесконечности так, что $\mathrm{Re}\, p$ неограниченно возрастает, то $F(p)$ стремится к нулю в силу первой оценки. Отсюда следует, что $F(p) \to 0$, если $p \to \infty$, оставаясь внутри любого угла $-\pi/2 + \delta < \arg p < \pi/2 + \delta$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало, причем эта сходимость равномерна относительно $\arg p$. Если, в частности, $F(p)$ аналитична в бесконечно удаленной точке, то $F(p) \to 0$ при $p \to \infty$ по любому пути; следовательно, в этом случае $F(p)$ имеет нуль в бесконечности.

1.3. **Обращение преобразования Лапласа.**

Теорема 1.2. *Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(p)$ служит ее изображением, то в любой точке t, где $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, справедливо равенство*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} F(p), \tag{1.3}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\mathrm{Re}\, p = a > s_0$ и понимается в смысле главного значения на бесконечности.

Здесь потребуется лемма Жордана.

Лемма Жордана. Пусть $g(z)$ – функция комплексного переменного z. Обозначим через C_{R_n} некоторую последовательность дуг окружностей: $C_{R_n} = \{z : |z| = R_n, \mathrm{Im}\, z > a\}$, где a фиксировано. Если на такой последовательности дуг функция $g(z)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно $\arg z$, то для любого $\alpha > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} g(z) e^{i\alpha z}\, dz = 0 \tag{1.4}$$

Мы приведем здесь, фактически, набросок доказательства Теоремы 1.2, опуская некоторые детали. Математическое строгое и полное доказательство изложено, например, в § 1, п. 79 книги: М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат "Методы теории функций комплексного переменного", гл. VI.

Рассмотрим интеграл

$$J(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{e^{pt}}{p},$$

взятый вдоль прямой $\mathrm{Re}\, p = a > 0$, проходимой снизу вверх. Обозначим еще через C_R и C'_R части окружности $|p| = R$, лежащие соответственно слева и справа от прямой $\mathrm{Re}\, p = a$, а через $a - ib$ и $a + ib$ – концы дуг C_R и C'_R, т.е. точки пересечения окружности с прямой $p = a$ (нужно сделать рисунок).

Пусть $t > 0$; так как $1/p \to 0$ при $R \to \infty$ равномерно относительно $\arg p$, то по лемме Жордана имеем:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} dp\, \frac{e^{pt}}{p} = 0.$$

Но по теореме Коши о вычетах:

$$\int\limits_{a-ib}^{a+ib} dp\, \frac{e^{pt}}{p} + \int\limits_{C_R} dp\, \frac{e^{pt}}{p} = 2\pi i,$$

поэтому в пределе при $R \to \infty$ получаем, что

$$J(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b\to\infty} \int\limits_{a-ib}^{a+ib} dp\, \frac{e^{pt}}{p} = 1 \tag{1.5}$$

при $t > 0$. Аналогично получаем $J(t) = 0$ при $t < 0$, т.е.: $J(t) = \theta(t)$, см. (1.1). Далее, мы имеем:

$$\theta(t-\tau) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{e^{p(t-\tau)}}{p} = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}$$

а тогда для "ступеньки"

$$\theta(t-\tau_1) - \theta(t-\tau_2) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} \frac{e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}}{p} = \begin{cases} 0, & t < \tau_1 \\ 1, & \tau_1 < t < \tau_2 \\ 0, & \tau_2 < t \end{cases},$$

где $\tau_1 < \tau_2$. Предположим, что произвольный оригинал $f(t)$ имеет конечный носитель. Разобьем его на интервалы n точками $\tau_1, \ldots, \tau_n$ и приблизим $f(t)$ ступенчатой функцией:

$$f(t) \cong \sum_{k=1}^{n-1} f(\tau_k)[\theta(\tau_k) - \theta(\tau_{k+1})].$$

В силу предыдущего равенства тогда

$$f(t) \cong \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \frac{e^{-p\tau_k} - e^{-p\tau_{k+1}}}{p} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) e^{-p\tau_k} \Delta' \tau_k \right),$$

где

$$\Delta' \tau_k = \frac{1 - e^{p(\tau_k - \tau_{k+1})}}{p}.$$

Таким образом, в пределе, когда точки τ_k заполняют весь интервал и все $\Delta' \tau_k \to 0$, мы получаем искомое выражение оригинала через его изображение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} \left(\int\limits_{0}^{\infty} d\tau\, f(\tau) e^{-p\tau} \right).$$

Случай произвольного оригинала может быть доказан посредством предельного перехода.

Литература к лекции 1: М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат "Методы теории функций комплексного переменного", гл. VI.

2. Лекция 2

2.1. **Еще одна формулировка теоремы обращения.** Мы доказали, что оригинал $f(t)$ вполне определяется своим изображением $F(p)$ с точностью до значений в точках разрыва $f(t)$. В самом деле, по доказанному значение оригинала в точке его непрерывности выражается через изображение $F(p)$, а значения оригинала в точках разрыва, очевидно, не влияют на изображение.

Теорема 2.1. *Если функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, стремится к нулю при $|p| \to \infty$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$ равномерно относительно $\arg p$, и интеграл $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, F(p)$ абсолютно сходится, то $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, данной в (1.3).*

Доказательство. Фиксируем некоторое число p_0, $\operatorname{Re} p_0 > a$, тогда из (1.3) следует:

$$\int\limits_0^\infty dt\, e^{-p_0 t} f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty dt\, e^{-p_0 t} \left(\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} F(p) \right).$$

Так как во внутреннем интеграле $p = a + i\sigma$, $dp = id\sigma$, то можно вынести за его знак множитель e^{at}. Далее, справедлива оценка

$$\left| \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{(p-p_0)t} F(p) \right| \leq e^{(a-\operatorname{Re} p_0)t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma\, |F(a+i\sigma)|$$

Таким образом этот интеграл сходится равномерно относительно t, и, следовательно, в предыдущей формуле можно изменить порядок интегрирования. Мы получим:

$$\int\limits_0^\infty dt\, e^{-p_0 t} f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, F(p) \int\limits_0^\infty dt\, e^{(p-p_0)t} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, \frac{F(p)}{p - p_0}.$$

По условию теоремы на дуге окружности C'_R: $|p| = R$, $\operatorname{Re} p > a$, имеем $\max |F(p)| \to 0$ при $R \to \infty$, следовательно,

$$\left| \int\limits_{C'_R} dp\, \frac{F(p)}{p - p_0} \right| \to 0$$

в этом пределе. Следовательно

$$\int\limits_0^\infty dt\, e^{-p_0 t} f(t) = F(p_0),$$

что и требовалось доказать. Заметим теперь, что при $t < 0$ по лемме Жордана мы получим $f(t) = 0$. Далее, из (1.3)

$$|f(t)| \leq \frac{e^{at}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma\, |F(a+i\sigma)| = Me^{at},$$

так что и условие 3 также выполняется. На проверке условия 1 мы не будем останавливаться.

2.2. **Предельные соотношения.** Если $f(t)$ и $f'(t)$ – оригиналы, $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0),$$

где $p \to \infty$ внутри угла $|\arg p| < \pi/2 - \delta$, при некоторм $\delta > 0$ и $f(0)$ – предел справа. Если таже существует $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, то

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty),$$

где $p \to 0$ внутри того же угла.

Доказательство. Пусть $f(t)$ дифференцируема. Тогда первый предел следует из следующих равенств:

$$pF(p) = p\int_0^\infty dt\, e^{-pt} f(t) = -\int_0^\infty dt\, \frac{\partial e^{-pt}}{\partial t} f(t) = f(0) + \int_0^\infty dt\, e^{-pt} f'(t), \tag{2.1}$$

и последний интеграл исчезает при $p \to \infty$. Если функция $f(t)$ не дифференцируема, то ее сколько угодно точно можно приблизить дифференцируемой, после чего проходит тоже доказательство. Для доказательства второго предела заметим, что существование $\lim_{t\to\infty} f(t)$ влечет ограниченность функции $f(t)$. Поэтому $s_0 = 0$ и последний интеграл в (2.1) существует при любом p, $\mathrm{Re}\, p > 0$ и существует при $p = 0$. В указанном в условии углу он сходится равномерно по p, так что в (2.1) можно перейти к пределу $p \to 0$ в этом углу, что дает $\int_0^\infty dt\, f'(t) = \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0)$.

Замечание 2.1. *Полученное асимптотическое поведение показывает, что при доказательстве того, что $pF(p) - f(0)$ имеет своим оригиналом $f'(t)$ по формуле*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt}(pF(p) - f(0))$$

последний интеграл нельзя разбивать на два, а следует записывать как

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, pe^{pt}\left(F(p) - \frac{f(0)}{p}\right) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt}\left(F(p) - \frac{f(0)}{p}\right) =$$

(в предположении, что можно дифференцировать под знаком интеграла)

$$= \frac{d}{dt}(f(t) - f(0)\theta(t)) = f'(t) \qquad \text{при } t > 0.$$

2.3. **Свойства преобразования Лапласа.** Простейшие преобразования:

$$1 \doteqdot \frac{1}{p} \text{ преобразование } \theta(t); \qquad e^{p_0 t} \doteqdot \frac{1}{p - p_0}. \tag{2.2}$$

Далее обозначаем: $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$ и т.д.

I Линейность: $\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p)$.

II Подобие: для любого постоянного $\alpha > 0$ имеем: $f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

III Если функция $f(t)$ напрерывна при $t > 0$ и $f'(t)$ (или $f^{(n)}(t)$) является оригиналом, то

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0),$$
$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

IV Дифференциирование изображения: $F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t)$.

V Интегрирование оригинала: $\int_0^t f(\tau) d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$.

Если $f(t)$ – оригинал, то легко видеть, что $g(t) = \int_0^t dt\, f(t)$ также является оригиналом. Тогда по III $f(t) = g'(t) \doteqdot pG(p)$ (учли, что $g(0) = 0$). Откуда, $f(t) \doteqdot F(p) = pG(p)$, откуда следует результат.

VI Интегрирование изображения. Если интеграл $\int_p^\infty dp\, F(p)$ сходится, то он служит изображением функции $f(t)/t$:

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty dp\, F(p),$$

т.е. интегрирование изображения равносильно делению оригинала на t.

Доказательство. Имеем: $\int_p^\infty dp\, F(p) = \int_p^\infty dp \int_0^\infty dt\, e^{-pt} f(t)$. Пусть путь интегрирования (p, ∞) весь лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$. Тогда $\left|\int_0^\infty dt\, e^{-pt} f(t)\right| \leq M \int_0^\infty dt\, e^{-(a-s_0)t}$, что доказывает равномерную сходимость этого интеграла относительно p. Поэтому мы можем изменить порядок интегрирования:

$$\int_p^\infty dp\, F(p) = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} \frac{f(t)}{t},$$

откуда следует утверждение. Отсюда же следует сходимость последнего интеграла.

VII Теорема запаздывания. Для любого $\tau > 0$: $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$.

VIII Теорема смещения. Для любого комплексного p_0: $e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p - p_0)$.

Решим в качестве примера начальную задачу:

$$x'(t) - x(t) = 1, \quad t > 0,$$
$$x(0) = x_0.$$

Переходя к изображениям, имеем:

$$(p-1)X(p) - x_0 = \frac{1}{p}, \text{ т.е. } X(p) = \frac{1}{p(p-1)} + \frac{x_0}{p-1}, \text{ или } X(p) = \frac{1+x_0}{p-1} - \frac{1}{p}. \tag{2.3}$$

Возвращаясь к оригиналам по (2.2), получаем:

$$x(t) = (1+x_0)e^t - 1, \quad t > 0, \tag{2.4}$$

что обобщает результат, который мы имели по методу Хевисайда.

Литература к Лекции 2: М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат "Методы теории функций комплексного переменного", гл. VI.

3. Лекция 3.

3.1. Свертка функций. Для дальнейшего нам потребуется понятие свертки функций. **Сверткой** функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция

$$(f * g)(x) = \int dy\, f(x-y)g(y), \tag{3.1}$$

если данный интеграл существует. В этом предположении укажем простейшие свойства свертки.

(1) Свертка линейна по каждому аргументу.
(2) Свертка коммутативна: $f * g = g * f$.
(3) Дистрибутивность: $f * (g + h) = f * g + f * h$.
(4) Ассоциативность: $f*(g*h) = (f*g)*h$. Требует для своего доказательства существования и перестановочности всех интегралов в формальной выкладке

$$\begin{aligned}(f * (g * h))(x) &= \int dy\, f(x-y) \int dz\, g(y-z)h(z) = \\ &= \int dz \left(\int dy\, f(x-y)g(y-z) \right) h(z) = \\ &= \int dz \left(\int dy\, f(x-z-y)g(y) \right) h(z) = \\ &= \int dz (f * g)(x-z)h(z) = ((f * g) * h)(x).\end{aligned}$$

3.2. Свертка, теорема Бореля и интеграл Дюамеля. Свертка заведомо существует, если функции – оригиналы для преобразования Лапласа. Тогда, как следует из свойства (2) оригинала

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t d\tau\, f(t-\tau)g(\tau) \equiv \int\limits_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau), \tag{3.2}$$

что определено в силу свойства (3) и обращается в ноль при $t < 0$. Пусть s_0 – наибольшее из показателей роста оригиналов, тогда

$$\left| \int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau) \right| \leq M \left| \int_0^t d\tau\, e^{s_0\tau} e^{s_0(t-\tau)} \right| = Mte^{s_0 t},$$

т.е. такой интеграл имеет показатель $s_0 + \epsilon$, где ϵ – любое сколь угодно малое положительное число. Покажем, что свертка двух изображений удовлетворяет условию Гельдера. Действительно, поскольку $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют всем трем свойствам изображений, справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}&|(f * g)(t+h) - (f * g)(t)| = \\ &= \left| \int\limits_t^{t+h} d\tau\, f(t+h-\tau)g(\tau) + \int\limits_0^t [f(t+h-\tau) - f(t-\tau)]g(\tau) \right| \leq \\ &\leq M_1 M_2 \int\limits_t^{t+h} d\tau\, e^{(t+h-\tau)s_1 + \tau s_2} + |h|^a A(t) M_2 \int\limits_0^t d\tau e^{s_2\tau} \leq |h|^{a'} A',\end{aligned}$$

где $|h| \leq h_0'$ для некоторых новых констант a', A' и h_0, где A', вообще говоря, может зависеть от t. Что и доказывает свойство Гельдера для свертки.

Теперь мы можем доказать теорему умножения (теорему Бореля):

Теорема 3.1. *Произведение двух изображений $F(p)$ и $G(p)$ также является изображением, причем:*

$$F(p)G(p) \doteqdot (f * g)(t).$$

Доказательство. Для изображения свертки имеем:

$$\int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau) \doteqdot \int_0^\infty dt\, e^{-pt} \int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau).$$

Справа здесь стоит двукратный интеграл по сектору плоскости (t,τ): интегрирование по τ ведется в пределах от 0 до t, а затем по t от 0 до ∞. Так как при $\mathrm{Re}\, p > s_0$ (s_0 – наибольший из показателей s_1 и s_2) этот двукратный интеграл абсолютно сходится, то в нем можно изменить порядок интегрированиям, и мы получим (заменяя еще t на $t_1 = t - \tau$):

$$\int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau) \doteqdot \int_0^\infty d\tau\, f(\tau) \int_\tau^\infty dt\, e^{-pt} g(t-\tau) =$$

$$= \int_0^\infty d\tau\, e^{-p\tau} f(\tau) \int_0^\infty dt_1\, e^{-pt_1} g(t_1) = F(p)G(p),$$

что и требовалось доказать. Теорема Бореля утверждает, что умножение изображений равносильно свертыванию оригиналов.

В приложениях полезно следствие теоремы умножения, которое относится к случаю, когда надо найти оригинал произведения $pF(p)G(p)$. Пользуясь правилом дифференцирования оригинала и (3.1), имеем $pF(p)G(p) \doteqdot \dfrac{d}{dt}(f*g)(t) + (f*g)(0)$, где последний член равен нулю по (3.2). Тогда, дифференцируя свертку, получаем **формулу (интеграл) Дюамеля**:

$$pF(p)G(p) \doteqdot f(0)g(t) + (f' * g)(t). \tag{3.3}$$

В силу симметрии свертки интеграл Дюамеля можно записать также как

$$pF(p)G(p) \doteqdot f(0)g(t) + (g * f')(t),$$

а переставляя $F \leftrightarrow G$, получаем

$$pF(p)G(p) \doteqdot f(t)g(0) + (g' * f)(t) \equiv g(0)f(t) + (f * g')(t),$$

Справедлива также теорема двойственная теореме умножения.

Теорема 3.2. *Пусть даны два оригинала $f(t)$ и $g(t)$ с показателями роста s_1 и s_2. Их произведение также является оригиналом, причем*

$$f(t)g(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dq\, F(q)G(p-q),$$

где $a > s_1$ и $\mathrm{Re}\, p > s_2 + a$.

Доказательство. В самом деле, произведение $f(t)g(t)$, очевидно, удовлетворяет условиям для оригиналов, поэтому для его изображения имеем

$$f(t)g(t) \doteqdot \int_0^\infty dt\, e^{-pt} f(t)g(t).$$

Возьмем $a > s_1$ и заменим $f(t)$ по формуле обращения:

$$f(t)g(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dt \left\{ \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dq\, e^{qt} F(q) \right\} e^{-pt} g(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dq \left\{ F(q) \int_0^\infty dt\, e^{-(p-q)t} g(t) \right\},$$

где перестановочность интегралов следует из их равномерной сходимости. Полагая $\operatorname{Re} p > s_2+a$, получаем что $\operatorname{Re}(p-q) > s_2$, поскольку $\operatorname{Re} q = a$. Поэтому внутренной интеграл равен $G(p-q)$.■

Замечание 3.1.

- *Поскольку a можно взять сколь угодно близким к s_1, то изображение функции $f(t)g(t)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s$, где $s = s_1 + s_2$ – показатель роста этой функции.*
- *Справедливо также равенство симметричное указанному в формулировке теоремы:*

$$f(t)g(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} dq'\, F(p-q')G(q'),$$

где $b > s_2$ и $\operatorname{Re} p > s_1 + b$. Действительно, положим $q' = p - q$, тогда по условию теоремы $\operatorname{Re} q' > s_2 + a - a = s_2$. Обозначим: $\operatorname{Re} q' = b$, тогда $b > s_2$, что дает первое условие. Далее, опять же по условию теоремы $\operatorname{Re}(p-q') > s_1$, а тогда получаем $\operatorname{Re} p > s_1 + b$, т.е. второе условие.

Примеры

Свойство 1 (линейность) позволяет находить по (2.2) такие преобразования, как

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$
$$\cos\omega t = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad \sinh\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}, \qquad \cosh\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}$$

Свойство IV позволяет получить по (2.2)

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad t^n e^{p_0 t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$$

а из предыдущих формул

$$t\sin\omega t \risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}, \qquad t\cos\omega t \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2},$$

В силу (2.2)

$$e^{bt} - e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a},$$

так что по Свойству VI, получаем

$$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty dp' \left(\frac{1}{p'-b} - \frac{1}{p'-a}\right) = \ln\frac{p-a}{p-b}.$$

Аналогично предыдущему примеру по изображению синуса получаем:

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty \frac{dp'}{1+p'^2} = \operatorname{arcctg} p.$$

Применяя свойство V, найдем изображение интегрального синуса

$$\operatorname{si} t \equiv \int_0^t \frac{\sin t}{t} \risingdotseq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$$

3.3. **Начальные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.** Пусть задан дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка n:

$$L = a_0\frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n.$$

Требуется решить начальную задачу

$$Lx(t) = f(t), \tag{3.4}$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \tag{3.5}$$

причем $a_0 \neq 0$, и $f(t)$ и $x(t)$ вместе со своими производными до n-го порядка суть оригиналы: $F(p) \doteqdot f(t)$ $X(p) \doteqdot x(t)$. Тогда, по правилу дифференцирования и линейности получаем операторное уравнение:

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)X(p) = F(p) + x_0(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) +$$
$$+ x_1(a_0p^{n-2} + a_1p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \cdots + x_{n-1}a_0,$$

т.е.

$$A(p)X(p) = F(p) + B(p).$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}.$$

Можно доказать, что решение $x(t)$ поставленной задачи всегда существует и является оригиналом $X(p)$.

Рассмотрим пример: решить уравнение $x'' - x = 1$ при произвольных начальных данных. По сказанному

$$X(p) = \frac{1}{p^2-1}\left(\frac{1}{p} + x_0p + x_1\right),$$

так что $x(t) = (1 + x_0)\cosh t + x_1 \sinh t - 1$.

Вернемся к задаче (3.4) с нулевыми начальными условиями (3.5). Пусть известно решение $x_1(t)$ уравнения $Lx_1(t) = 1$ также с нулевыми начальными данными. Тогда имеем:

$$A(p)X(p) = F(p), \qquad A(p)X_1(p) = \frac{1}{p},$$

откуда $X(p) = pX_1(p)F(p)$. Поэтому, по формуле Дюамеля (3.3)

$$x(t) = \int_0^t d\tau\, x_1'(t-\tau)f(\tau).$$

Таким образом $x_1'(t-\tau)$ – **функция Грина** рассматриваемой задачи.

Мы видим, что функция Грина начальной задачи (задачи Коши) с нулевыми начальными условиями для линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами существует, равна 0 при $t < s$, зависит от разности $t - s$ при $s < t$ и задается формулой Дюамеля.

3.4. **Граничные задачи и их функции Грина.** Перейдем к рассмотрению граничных задач, причем мы не будем предполагать, что рассматриваемые функции – оригиналы для преобразования Лапласа. Пусть L – дифференциальный оператор n-го порядка

$$L_x = a_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x).$$

Рассмотрим задачу

$$L_xf(x) = g(x), \qquad a < x < b, \tag{3.6}$$

где a и b конечны, а все заданные функции $a_i(x)$ и $g(x)$ гладкие и дифференцируемые нужное число раз, причем $a_0(x)$ не обращается в ноль при $x \in [a,b]$. Предполагая существование решения, будем искать его для любой функции $g(x)$ в виде

$$f(x) = \int_a^x dy\, G_+(x,y)g(y) + \int_x^b dy\, G_-(x,y)g(y) \tag{3.7}$$

где $G_+(x,y)$ и $G_-(x,y)$ – гладкие n раз дифференцируемые функции x. Очевидно, что

$$f'(x) = G_+(x,x)g(x) - G_-(x,x)g(x) + \int_a^x dy\, G'_+(x,y)g(y) + \int_x^b dy\, G'_-(x,y)g(y),$$

где $G_+(x,x) = G_+(x,x-0)$, $G_-(x,x) = G_+(x,x+0)$, и штрих означает производную по x. Если $n > 0$, то при подстановке в (3.6) мы получим производную функции g. Поэтому этот член следует занулить, наложив условие $G_+(x,x) = G_-(x,x)$, $a < x < b$. Далее, по индукции, получаем, что мы должны наложить условия

$$G_+^{(k)}(x,x) = G_-^{(k)}(x,x), \quad k = 0,\dots,n-2, \tag{3.8}$$

что дает при $k = 0,1,\dots,n-1$:

$$f^{(k)}(x) = \int_a^x dy\, G_+^{(k)}(x,y)g(y) + \int_x^b dy\, G_-^{(k)}(x,y)g(y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = {} & \bigl(G_+^{(n-1)}(x,x) - G_-^{(n-1)}(x,x)\bigr)g(x) + \\ & + \int_a^x dy\, G_+^{(n)}(x,y)g(y) + \int_x^b dy\, G_-^{(n)}(x,y)g(y). \end{aligned}$$

Подстановка в (3.7) дает:

$$\begin{aligned} & L_x G_+(x,y) = 0, \quad a < y < x < b, \\ & L_x G_-(x,y) = 0, \quad a < x < y < b, \\ & G_+^{(n-1)}(x,x) - G_-^{(n-1)}(x,x) = \frac{1}{a_0(x)}. \end{aligned}$$

Таким образом мы построили **фундаментальное решение** рассматриваемой задачи, т.е. такое решение, через которое выражается любое другое:

$$f(x) = \int_a^b dy\, G(x,y)g(y), \qquad G(x,y) = \theta(x-y)G_+(x,y) + \theta(y-x)G_-(x,y). \tag{3.9}$$

Наложив на него необходимые **граничные условия**, мы получаем **функцию Грина**. Ввиду (3.8) функция $G(x,y)$ и ее производные $G^{(k)}(x,y)$, $k = 1,\dots,n-2$, непрерывны “на диагонали” $y = x$. При этом n условий на G^+ и G^- уже были наложены. Остается наложить еще n граничных условий.

Итак, мы видим, что $L_x \int_a^b dy\, G(x,y)g(y) = g(x)$, т.е., все вместе дает **функционал**, отображающий функцию в ее значение в некоторой точке, являющейся параметром этого функционала. Такой функционал был введен Дираком и назван δ-функцией, причем он подразумевал именно “интегральную” форму записи:

$$\int dx\, \delta(x)f(x) = f(0). \tag{3.10}$$

Тогда полученный выше результат можно записать как

$$L_x G(x, y) = \delta(x - y). \tag{3.11}$$

Литература к лекции 3: М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат “Методы теории функций комплексного переменного”, гл. VI.

4. Лекция 4

4.1. **Обобщенные функции: основные определения.** Понятно, что δ-функция не есть функция в стандартном понимании (фон Нейман: "“несобственные” конструкции ... лежат за пределами обычно употребляемых математических методов”): при всех $x \neq 0$ она равна нулю, а интеграл от нее нулю не равен, в частности $\int dx\, \delta(x) = 1$. Фактически, мы встречались с ней и ранее, когда использовали формулу Дюамеля. Ведь, строго говоря, мы решали уравнение на $x_1(t)$: $Lx_1(t) = \theta(t)$, а для формулы Дюамеля нам нужна производная $x_1'(t-\tau)$, которая удовлетворяет уравнению $Lx_1'(t-\tau) = \dfrac{d\theta(t-\tau)}{dt}$, так что естественно считать, что производная $\theta(t)$ есть $\delta(t)$. Итак, нам нужны линейные функционалы на “гладких” функциях: понятно, что для $f(x) = 1/x$ правая часть (3.10) неопределена. Фактически, мы уже пользовались такими функционалами, заданными интегралами и свертками, причем нам совсем не мешало, что в некоторых точках функции не были определены – лишь бы существовали интегралы. Это позволяет не только обобщить понятие функции, но и сделать их всех бесконечно дифференцируемыми, используя формулу интегрирования по частям, как определение. При этом, чтобы не мешали граничные члены, желательно выбрать функции, на которых заданы эти функционалы достаточно быстро убывающими на бесконечности. Итак, мы вводим два множества **основных функций**.

Определение 4.1. *Рассмотрим множество всех (комплекснозначных) бесконечно дифференцируемых функций $\phi(x)$, $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ от n вещественных переменных. Мы говорим, что функция из этого множества принадлежит пространству*

1) $\mathscr{D}$ основных функций (пространству финитных функций), если она финитна, т.е., обращается в ноль вне некоторой конечной области в $\mathbb{R}^n$.

2) $\mathscr{S}$ основных функций (пространству быстро убывающих функций), если при $|x| \to \infty$ она стремится к нулю вместе со всеми своими производными быстрее любой конечной степени $|x|$, т.е. при всех x выполнены неравенства

$$|x^k \phi^{(q)}(x)| \leq C_{k,q}, \quad k, q = 0, 1, \ldots$$

Примеры:

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp \dfrac{a^2}{x^2 - a^2}, & \text{если } x^2 < a^2, \\ 0, & \text{если } x^2 \geq a^2, \end{cases} \in \mathscr{D}, \tag{4.1}$$

$$\phi(x) = e^{-x^2} \in \mathscr{S}. \tag{4.2}$$

Понятно, что оба введенные пространства линейны. Зададим на них топологию посредством

Определение 4.2. *Мы говорим, что последовательность основных функций $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots$*

1) сходится к нулю в пространстве $\mathscr{D}$, если все функции последовательности обращаются в ноль вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю, как и их производные любого порядка,

2) сходится к функции $\phi(x)$ в пространстве $\mathscr{S}$, если в любой ограниченной области производная любого порядка от $\phi_n(x)$ равномерно сходится к соответствующей производной функции $\phi(x)$ и в оценках

$$|x^k \phi_n^{(q)}(x)| \leq C_{k,q}, \quad k, q = 0, 1, \ldots,$$

постоянные $C_{k,q}$ можно выбрать независящими от n.

Понятно, что $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$, причем плотно в нем (доказательство: умножим функцию из $\mathscr{S}$ на функцию, определенную в (4.1) и перейдем к пределу $a \to \infty$).

Определение 4.3. *Обобщенной функцией, заданной на соответствующем пространстве основных функций, называется линейный непрерывный функционал на этом пространстве. Иными словами, каждой основной функции $\phi(x)$ сопостовляется число, обозначаемое (f, ϕ), причем выполнены следующие условия:*

1) для любых двух чисел a_1 и a_2 и любых двух основных функций $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ имеет место равенство $(f, a_1\phi_1 + a_2\phi_2) = a_1(f,\phi_1) + a_2(f,\phi_2)$ (линейность);

2) если последовательность основных функций $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots$ стремится к нулю, то последовательность чисел $(f,\phi_1), (f,\phi_2), \ldots, (f,\phi_n), \ldots$ сходится к нулю (непрерывность).

Пусть задана некоторая функция $f(x)$, абсолютно интегрируемая в каждой конечной области пространства $\mathscr{R}^n$ (называется локально интегрируемой функцией). Зададим функционал

$$(f,\phi) = \int dx\, f(x)\phi(x). \tag{4.3}$$

Показать, что это – линейный непрерывный функционал на обоих пространствах.

4.2. **Локальные свойства обобщенных функций.** Очевидно, что интеграл $\int dx \dfrac{\phi(x)}{x}$ расходится, если функция $\phi(x)$ не обращается в ноль в нуле. Регуляризовать такой интеграл, т.е. функцию $1/x$, возможно следующим образом:

$$\int dx\phi(x)\text{reg.}\frac{1}{x} = \int\limits_{-\infty}^{-a} dx\frac{\phi(x)}{x} + \int\limits_{-a}^{b} dx\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x} + \int\limits_{b}^{\infty} dx\frac{\phi(x)}{x},$$

для некоторых положительных a и b и где $\phi(x)$ – основная функция (из $\mathscr{S}$ или $\mathscr{D}$). Обозначим через p.v. специальную регуляризацию в смысле “главного значения":

$$\left(\frac{1}{x},\phi\right) \equiv \text{p.v.}\int dx\frac{\phi(x)}{x} \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|x|>\epsilon} dx\frac{\phi(x)}{x}. \tag{4.4}$$

Как легко видеть:

$$\left(\frac{1}{x},\phi\right) = \int\limits_{0}^{\infty} dx\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}$$

и по предыдущему

$$\int dx\phi(x)\text{reg.}\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x},\phi\right) + \ln\frac{a}{b}\phi(0),$$

так что произвольная регуляризация функции $1/x$ дается с точностью до произвольной константы в виде

$$\text{reg.}\frac{1}{x} = \text{p.v.}\frac{1}{x} + C\delta(x),$$

где δ-функция Дирака (ср. (3.10)) определена как функционал на основной функции $\phi(x)$ равенством

$$(\delta,\phi) = \phi(0). \tag{4.5}$$

Обобщенная функция f равна нулю в окрестности U точки x_0 означает, что $(f,\phi) = 0$ для каждой основной функции ϕ, отличной от нуля только внутри U. Обобщенная функция f, отвечающая обычной функции $f(x)$, равна нулю в окрестности U точки x_0, если почти всюду в этой окрестности функция $f(x)$ обращается в нуль. Обобщенная функция $\delta(x-x_0)$ равна нулю в окрестности любой точки, отличной от x_0. Обобщенная функция f равна нулю в открытой области G, если она равна нулю в окрестности каждой точки этой области. Если обобщенная функция f не равна нулю ни в какой окрестности точки x_0, то такая точка называется существенной для f (ноль - существенная точка для $f(x) = x^2$). Обобщенные функции f и g совпадают в открытой области G, если разность $f-g$ в этой области равна нулю. Если f и g совпадают в окрестности каждой точки, то они совпадают в целом, т.е. $(f,\phi) = (g,\phi)$ для любой ϕ. Обобщенная функция f регулярна в области G, если в этой области она совпадает с некоторой обычной локально интегрируемой функцией $f(x)$.

Указанная выше регуляризация дает пример решения общей задачи: пусть дана функция $f(x)$, которая не является локально интегрируемой. Найти обобщенную функцию f, совпадающую с данной во всех точках ее локальной интегрируемости. Это не всегда возможно: $\exp 1/x$.

При этом следует сохранить основные операции: сложение, умножение на число, умножение на функцию, сдвиг аргумента, дифференцирования и интегрирования. Часть их определяется тривиально путем переноса обратных операций на основные функции. Рассмотрим замену переменных. Пусть даны локально интегрируемая функция $f(x)$ и бесконечно дифференцируемая строго монотонная функция $a(x)$, тогда для любой основной функции $\phi(x)$

$$\int dx\, f(a(x))\phi(x) = \int dy\, (a^{-1}(y))' f(y)\phi(a^{-1}(y))$$

где $y = a(x)$ и a^{-1} означает обратную функцию. Поскольку произведение $(a^{-1}(y))'\phi(a^{-1}(y))$ также является основной функцией (в пространстве $\mathscr{S}$ следует потребовать роста $a(x)$ на бесконечности). Поэтому каждой обобщенной функции f мы сопоставляем обобщенную функцию $f(a)$ по правилу:

$$(f(a), \phi) = (f, (a^{-1})'\phi(a^{-1}))$$

В частности

$$(\delta(a), \phi) = (a^{-1}(y))'\phi(a^{-1}(y))|_{y=0}.$$

Пусть $a(x_0) = 0$ – ноль (единственный) функции $a(x)$. Тогда $\delta(a(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{a'(x_0)}$. В некоторых случаях можно отказаться от требования монотонности. Например, если все нули функции $a(x)$ простые, то можно показать, что

$$\delta(a(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{|a'(x_j)|},$$

где суммирование ведется по всем нулям x_j функции $a(x)$.

Литература к лекции 4: И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”, гл. I; В.С.Владимиров , В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”.

5. Лекция 5

5.1. **Мультипликаторы и свертка обобщенных функций с основными.** Общее определение произведения обобщенных функций невозможно. Однако, если регулярная функция $a(x)$ такова, что для любой основной функции $\phi(x)$ произведение $a(x)\phi(x)$ также является основной функцией, причем для любой сходящейся последовательности $\phi_n(x)$ последовательность $a(x)\phi_n(x)$ также является сходящейся, то умножение обобщенной функции на такую регулярную определяется формулой

$$(af, \phi) = (f, a\phi), \tag{5.1}$$

что дает линейный и непрерывный (в силу сказанного выше) функционал на пространстве основных функций, а функция $a(x)$ называется **мультипликатором**. В частности для пространства $\mathscr{D}'$ мультипликаторами являются все бесконечно дифференцируемые функции, а для пространства $\mathscr{S}'$ следует потребовать от $a(x)$ роста на бесконечности не быстрее полиномиального.

Ниже мы рассмотрим операцию свертки обобщенных функций. Здесь же отметим только, что если $\phi(x)$ – основная функция в одном из трех пространств, то для любого конечного y функция $\phi(x-y)$ также является основной в том же пространстве. Поэтому свертку $(\phi * f)(x)$ основной функции с обобщенной можно определить как

$$(\phi * f)(x) = (f, \phi(\cdot - x)), \tag{5.2}$$

что, очевидно, дает обычную бесконечно дифференцируемую функцию, вообще говоря не принадлежащую ни $\mathscr{D}$, ни $\mathscr{S}$. Таким образом также можно строить регуляризации обобщенных функций. Действительно, пусть имеется какая-то *delta*-образная последовательность основных функций: ψ_n: $(\psi_n, \phi) \to \phi(0)$ для произвольной оьновной функции $\phi(x)$. То тогда для любой обобщенной функции $f(x)$ последовательность обычных функций $(\psi_n * f)(x)$ сходится к $f(x)$ в смысле обобщенных функций.

5.2. **Дифференцирование обобщенных функций.** Основным достоинством обобщенных функций, определяющим их приложимость к исследованию дифференциальных уравнений является их бесконечная дифференцируемость в смысле следующего определения.

Определение 5.1. *Для заданной обобщенной функции f ее производная по x определяется как:*

$$(f', \phi) = -(f, \phi'). \tag{5.3}$$

Легко видеть, что данное определение дает обобщенную функцию в каждом из рассматриваемых пространств.

Пример. Показать, что в смысле главных значений:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

где обобщенная функция $\dfrac{1}{x^2}$ в смысле главного значения определяется как

$$\left(\frac{1}{x^2}, \phi\right) = \text{p.v.} \int dx \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2} \equiv \int_0^\infty dx \frac{\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)}{x^2}$$

5.3. **Сходимость обобщенных функций и δ-образные последовательности.** Мы говорим, что последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots$ сходится к обобщенной функции f, если

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, \phi) = (f, \phi).$$

Тогда дифференцирование – непрерывная операция. Действительно, если последовательность обобщенных функций $f_n \to f$, $n \to \infty$, то

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \phi\right) = -\left(f_n, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \to -\left(f, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \phi\right).$$

Пример: $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{n} \to 0$ в смысле пространства $\mathscr{S}'$ при $n \to \infty$. Но тогда и $e^{inx} \to 0$ в смысле $\mathscr{S}'$ при $n \to \infty$.

δ-образная последовательность – последовательность регулярных функционалов, сходящаяся к δ-функции. При этом должны выполняться следующие условия:

а) для любого $M > 0$ при $|a| \leq M$ и $|b| \leq M$ величины $\left|\int_a^b dx f_n(x)\right|$ ограничены постоянной не зависящей от a, b и n (но возможно зависящей от M);

б) при любых фиксированных $a < b$, отличных от нуля,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b dx\, f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } a < b < 0 \text{ или } 0 < a < b \\ 1 \text{ при } a < 0 < b \end{cases}$$

Пусть $f_n(x)$ – такая последовательность. Рассмотрим последовательность функций $F_n(x) = \int_{-1}^{x} dy\, f_n(y)$. Она равномерно по n ограничена в каждом промежутке, так что $F_n(x) \to \theta(x)$. Для производной функции Хевисайда имеем:

$$(\theta', \phi) = -(\theta, \phi') = -\int_x^{+\infty} dx \phi'(x) = \phi(0),$$

так что

$$\theta' = \delta, \tag{5.4}$$

Отсюда ввиду непрерывности дифференцирования $f_n(x) \to \delta(x)$. Пример: $f_\epsilon(x) = \dfrac{1}{2\epsilon}[\theta(x+\epsilon) - \theta(x-\epsilon)]$ при $\epsilon \to 0$. Интересно отметить, что $f'_\epsilon(x) = \dfrac{1}{2\epsilon}[\delta(x+\epsilon) - \delta(x-\epsilon)]$ и, конечно, $f'_\epsilon(x) \to \delta'(x)$.

5.4. **Первообразные обобщенных функций.** Любая основная функция из $\mathscr{D}$, или из $\mathscr{S}$, может быть представлена в виде

$$\phi(x) = \psi(x) + C\chi(x), \tag{5.5}$$

где $\psi(x)$ и $\chi(x)$ основные функции из того же пространства, причем

$$\int dx \psi(x) = 0, \qquad \int dx \chi(x) = 1, \qquad \text{константа } C = \int dx \phi(x). \tag{5.6}$$

Поэтому для каждой основной функции $\phi(x)$ существует первообразная $\eta(x)$. Она однозначно определяется как элемент $\mathscr{D}$ (или $\mathscr{S}$) тогда и только тогда, когда

$$\int dx \phi(x) = 0. \tag{5.7}$$

Пусть существует $\eta(x) \in \mathscr{D}$ (или $\mathscr{S}$) заданная посредством $\eta'(x) = \phi(x)$. Тогда

$$\int dx\, \phi(x) = \int dx\, \eta'(x) = 0,$$

т.е. (5.7) выполнено. Обратно, положим, что (5.7) выполнено и определим $\eta(x) = \int_{-\infty}^{x} dy\, \phi(y)$. Очевидно, что при больших x эта функция константа (ограничена). Понятно, что в силу условия (5.7) $\eta(x)$ стремится к нулю на обоих бесконечностях. Единственность такой функции очевидна, как и ее бесконечная дифферецируемость. Понятно, что если $\phi(x) \in \mathscr{D}$, то $\eta(x)$ финитна. Если $\phi(x) \in \mathscr{S}$, то оценки $|x^m \eta^{(n)}(x)|$ выполнены при всех $n \geq 1$, а при $n = 0$ они следуют тривиально.

Теорема 5.1. *Любая обобщенная функция f (из $\mathscr{D}'$ или $\mathscr{S}'$) обладает первообразной g, $g' = f$, принадлежащей соответствующему пространству, причем такая первообразная единственна с точностью до произвольной константы.*

Доказательство. Как было показано выше, для любой основной функции $\psi(x)$ найдется такая основная функция $\phi(x)$, что

$$\psi(x) = \phi'(x) + \omega(x) \int dy\, \psi(y), \text{ где } \omega(x) \text{ – основная функция с } \int dx\, \omega(x) = 1.$$

Определим

$$(g, \psi) \equiv (g, \phi') + (g, \omega)(1, \psi) = -(f, \phi) + (g, \omega)(1, \psi), \tag{5.8}$$

что, очевидно, задает линейный непрерывный функционал на соответствующем пространстве, т.е. обобщенную функцию.■

Литература к лекции 5: Г.Бремерман, “Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье”; В.С.Владимиров , В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”.

6. Лекция 6

6.1. **Формулы Сохоцкого–Племеля и предельные значения голоморфных функций.** Из курса ТФКП известно, что если C – кривая в $\mathbb{C}$ и $f(\xi)$ – интегрируемая функция на C, то определен интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - z}$$

Утверждение. $\Phi(z)$ аналитична вне C (по теореме о зависимости от параметра), но на C функция $\Phi(z)$ не определена. Чему равен предел $\Phi(z)$, когда $z \to \xi_0 \in C$, если он существует?
Пример. C – замкнутый контур. $f(\xi)$ – ограничение на C голоморфной функции. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - z} = \begin{cases} f(z), & z \text{ внутри } C \\ 0, & z \text{ вне } C \end{cases}.$$

Общий случай дается теоремой Сохоцкого.

Теорема 6.1. *Пусть $f(\xi)$ локально и глобально интегрируема на кусочно гладкой кривой C и удовлетворяет условию Гельдера*[1] *в окрестности ξ_0, где $\xi_0 \in \mathbb{C}$ – не точка излома и не концевая точка. Тогда*

$$\Phi(z) \to \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\,\text{p.v.}\displaystyle\int\limits_C \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - \xi_0} + \frac{f(\xi_0)}{2}, & z \to \xi_0 \text{ слева}, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i}\,\text{p.v.}\displaystyle\int_C \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - \xi_0} - \frac{f(\xi_0)}{2}, & z \to \xi_0 \text{ справа}, \end{cases}$$

где p.v. *– предел интеграла по C с вырезанным вокруг ξ_0 симметричным относительно ξ_0 отрезком при стремлении его длины к нулю.*

Доказательство. Докажем для $C = \mathbb{R}$ и функции $f(\xi)$, убывающей на бесконечности так, чтобы интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - z}$ сходился при $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$. Итак, пусть $\xi_0 \in \mathbb{R}$ и выберем R такое, что $R > |\xi_0|$. Запишем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - z} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{[f(\xi) - f(\xi_0)\theta(R - |\xi|)]}{\xi - z} + f(\xi_0)\int\limits_{-R}^{+R} \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Поскольку $f(\xi)$ удовлетворяет условию Гельдера, то при $z \to \xi_0 \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{[f(\xi) - f(\xi_0)\theta(R - |\xi|)]}{\xi - z} \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{[f(\xi) - f(\xi_0)\theta(R - |\xi|)]}{\xi - \xi_0} \equiv$$

$$\equiv \text{p.v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - \xi_0} - f(\xi_0)\ln\frac{|R - \xi_0|}{|R + \xi_0|}.$$

[1]Функция $f(x)$, определенная в области E n -мерного евклидова пространства, удовлетворяет в точке $y \in E$ условию Гельдера с показателем α, $0 < \alpha \leq 1$, и коэффициентом $A(y)$, если $|f(x) - f(y)| \leq A(y)|x - y|^\alpha$ для всех x, достаточно близких к y.

Здесь главное значение ввиду особенности около ξ_0: на бесконечности интегралы сходятся ввиду убывания $f(\xi)$. Далее, при $\epsilon > 0$

$$\int\limits_{-R}^{+R} \frac{d\xi}{\xi - z}\bigg|_{z=\xi_0 \pm i\epsilon} = \int\limits_{-R}^{+R} \frac{d\xi}{\xi - \xi_0 \mp i\epsilon} =$$
$$= \ln(\xi - \xi_0 \mp i\epsilon)\big|_{\xi=-R}^{\xi=R} =$$
$$= \ln \frac{|R - \xi_0 \pm i\epsilon|}{|-R - \xi_0 \pm i\epsilon)|} + i \arg(R - \xi_0 \pm i\epsilon) - i \arg(-R - \xi_0 \pm i\epsilon),$$

где аргумент комплексного числа выбирается в интервале от $-\pi$ до π. Суммируя полученные результаты, мы получаем в пределе $z \to \xi_0$ (т.е. $\epsilon \to +0$) утверждение теоремы. ■

Замечание 6.1. *Пусть $\Phi_\pm(z)$ – интегралы Коши $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\xi\, f(\xi)}{\xi - z}$ в верхней и нижней полуплоскостях. По формуле Сохоцкого $\Phi_\pm(z)$ имеют пределы при $z \to \xi \in \mathbb{R}$, причем*

$$\begin{cases} \Phi_+(\xi) - \Phi_-(\xi) = f(\xi), \\ \Phi_+(\xi) + \Phi_-(\xi) = \dfrac{1}{\pi i}\,\mathrm{p.v.}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi'\, f(\xi')}{\xi' - \xi}. \end{cases}$$

В частности, отсюда следует, что любая $f \in C^1(\mathbb{R})$, убывающая на бесконечности, представима как скачок голоморфных функций.

Замечание 6.2. *Дла любой $\phi \in \mathscr{S}$ (или $\phi \in \mathscr{D}$) по формуле Сохоцкого–Племеля*

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{dx\, \phi(x)}{x - (\xi \pm i0)} = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{p.v.}\!\int \frac{dx\, \phi(x)}{x - \xi} \pm \frac{\phi(\xi)}{2},$$

так что теорема есть расширение формулы с пространства основных функций на функции, удовлетворяющие условию Гельдера.

6.2. **Аналитическое представление обобщенных функций.** Формулы Сохоцкого–Племеля, примененные к основным функциям

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{dx\, \phi(x)}{x - (\xi \pm i0)} = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{p.v.}\!\int \frac{dx\, \phi(x)}{x - \xi} \pm \frac{\phi(\xi)}{2},$$

могут быть прочитаны (при $\xi = 0$) как следующие равенства обобщенных функций

$$\begin{aligned} \frac{1}{x + i0} &= \mathrm{p.v.}\frac{1}{x} - \pi i \delta(x), \\ \frac{1}{x - i0} &= \mathrm{p.v.}\frac{1}{x} + \pi i \delta(x), \end{aligned} \tag{6.1}$$

которые также называются формулами Сохоцкого–Племеля. Они могут быть также получены дифференциированием функции $\log(x \pm i\varepsilon)$, поскольку $\frac{1}{x \pm i0} = \lim_{\varepsilon \to \pm 0} \frac{1}{x + i\varepsilon}$. Выразим из этих формул обобщенные функции $\delta(x)$ и $1/x$ в смысле главного значения:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0}\right), \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + i0} + \frac{1}{x - i0}\right) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Функция $\frac{1}{x + i0}$ есть предельное значение функции $\frac{1}{z}$, где $z = x + iy$ и $y \to +0$, функция же $\frac{1}{x - i0}$ есть предельное значение функции $\frac{1}{z}$, где $y \to -0$. Таким образом, приведенные выше формулы представляют обобщенные функции $\delta(x)$ и $1/x$ в виде разности граничных значений функции, голоморфной в верхней полуплоскости и функции, голоморфной в нижней полуплоскости.

Представление обобщенной функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

где $f^+(x)$ – граничное значение (не обобщенной!) функции, голоморфной в верхней полуплоскости, и где $f^-(x)$ – граничное значение функции, голоморфной в нижней полуплоскости, называется **аналитическим представлением обобщенной функции** f. Имеет место

Теорема (см. Г.Бремерман, “Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье”): Всякая обобщенная функция из $\mathscr{D}'$ допускает аналитическое представление.

В общем случае найти аналитическое представление обобщенной функции непросто. Однако, если f – обобщенная функция с компактным носителем, или при достаточно больших x совпадающая с абсолютно интегрируемой функцией $f(x)$, убывающей на бесконечности, то аналитическое представление f находится при помощи интеграла Коши:

$$f^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'\, f(x')}{x'-z} \equiv \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'\, f(x')}{z-x'}, \qquad z = x+iy \in \mathbb{C},$$

Иными словами, аналитические в полуплоскостях функции $f^\pm(z)$ получаются сверткой функции $f(x)$ и ядра Коши $(-2\pi i z)^{-1}$:

$$f^\pm(z) = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{z} * f\right).$$

Например, для $f(x) = \delta(x)$ эта формула дает

$$f^\pm(z) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'\,\delta(x')}{z-x'} = \frac{i}{2\pi z},$$

так что мы возвращаемся к первому равенству в (6.2):

$$\delta(x) = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right).$$

Для $f(x) = 1/x$ несколько более сложные вычисления дают $f^\pm(z) = \pm 1/2z$, что приводит к аналитическому представлению обобщенной функции $1/x$, т.е. второму равенству в (6.2).

6.3. **Прямое произведение обобщенных функций и свертка.** Пусть заданы обобщенные функции $f(x)$ и $g(x)$. Пусть $\phi(x,y)$ – основная функция, скажем из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$. Тогда прямое произведение $f \times g$ определяется как

$$(f(x)\times g(y), \phi(x,y)) = (f(x), (g(y), \phi(x,y))).$$

Свойства:

$$\text{Коммутативность:}\quad f(x)\times g(y) = g(y)\times f(x),$$
$$\text{Ассоциативность:}\quad f(x)\times\{g(y)\times h(z)\} = \{f(x)\times g(y)\}\times h(z).$$

Доказательство следует из того факта, что любую основную функцию $\phi(x,y)$ можно приблизить суммами $\sum_{j=1}^n \phi_j(x)\psi_j(y)$, где $j = 1,2,\ldots$, $n = 1,2,\ldots$ и $\phi_j(x)$ и $\psi_j(y)$ – последовательности основных функций своих переменных. Кроме того,

$$(f(x)\times g(y), \phi(x)\psi(y)) = (f(x),\phi(x))(g(y),\psi(y)).$$

Если $f(x)$ и $g(x)$ – две абсолютно интегрируемых функции на прямой, то их свертка определяется как

$$(f*g)(x) = \int dy f(y)g(x-y) \equiv \int dy f(x-y)g(y).$$

Так что для любой основной функции $\phi(x)$:

$$((f*g)(x), \phi(x)) = \int dx \int dy f(y)g(x)\phi(x+y).$$

Поэтому для обобщенных функций f и g мы определим свертку как

$$(f * g, \phi) = (f(x) \times g(y), \phi(x + y)),$$

если указанный функционал существует. Важно помнить, что $\phi(x+y)$ не есть основная функция двух переменных x и y, так что он не обязан существовать. В частности, это определение осмыслено, если

1) одна из обобщенных функций имеет ограниченный носитель;

2) носители обоих обобщенных функций ограничены с одной и той же стороны, например, $f = 0$ при $x < a$ и $g = 0$ при $y < b$.

Для доказательства в $\mathscr{D}'$ следует рассмотреть выражения $(f(x), \phi(x + y))$. Так в случае 1) это – основная функция от y. Легко проверить, что

$$\begin{aligned}
&\delta * f = f \quad \text{для любой обобщенной функции} \quad f,\\
&f * g = g * f, \quad \text{по крайней мере в случаях 1) и 2)},\\
&(f * g) * h = f * (g * h),
\end{aligned}$$

если носители двух из трех функционалов ограничены, или когда носители всех трех ограничены с одной стороны, кроме того для любого дифференциального оператора D выпоняется

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg.$$

Условия непрерывности свертки, т.е. из $f_n \to f$ следует $f_n * g \to f * g$, нужно проверять в каждом частном случае. Например, если сходящаяся последовательность f_n такая, что все ее элементы имеют носитель в одном и том же ограниченном множестве, то это справедливо. Аналогично и для равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial t} * g.$$

Замечание о прямом произведении обобщенных функций. Обращение с прямым произведением на каждом этапе требует аккуратности, чтобы не выйти за его рамки. Так, казалось бы очевидное равенство

$$\frac{1}{x}\frac{1}{y} = \frac{1}{y - x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right), \tag{6.3}$$

где выражения типа $1/x$ понимаются в смысле главного значения, неверно, хотя все члены в обоих частях хорошо определены именно как прямые произведения обобщенных функций. Дело здесь в том, что при приведении правой части к общему знаменателю возникает отношение $\dfrac{y - x}{(y - x)xy}$, которое уже не есть прямое произведение, поскольку в знаменателе сингулярны три множителя, зависящие только от двух переменных. Правильный способ действий, например, такой. Пусть ϵ_1 и ϵ_2 – положительны. Рассмотрим равенство

$$\frac{1}{x + i\epsilon_1}\frac{1}{y - i\epsilon_2} = \frac{1}{y - x - i(\epsilon_1 + \epsilon_2)}\left(\frac{1}{x + i\epsilon_1} - \frac{1}{y - i\epsilon_2}\right),$$

которое заведомо верно, поскольку не содержит особенностей. Более того, это равенство допускает предел $\epsilon_1, \epsilon_2 \to +0$, независящий от порядка предельных переходов. Это дает по определению равенство обобщенных функций (их прямых произведений):

$$\frac{1}{x + i0}\frac{1}{y - i0} = \frac{1}{y - x - i0}\left(\frac{1}{x + i0} - \frac{1}{y - i0}\right).$$

Очевидно, что в прямом произведении обобщенных функций мы для каждой из них можем пользоваться формулой Сохоцкого–Вейрштрассе. Тогда вещественная часть этого предыдущего равенства дает

$$\frac{1}{x}\frac{1}{y} = \frac{1}{y - x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + \pi^2\delta(x)\delta(y), \tag{6.4}$$

что есть правильная версия правой части формулы (6.3). Равенство (6.4) также может быть получено посредством свертки Фурье-образов главных значений.

Литература к лекции 6: И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов "Обобщенные функции и действия над ними", гл. II; В.С.Владимиров , В.В.Жаринов "Уравнения математической физики", Г.Бремерман, "Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье"'.

7. Лекция 7

7.1. Регуляризация функций со степенными особенностями посредством аналитическго продолжения. Рассмотрим функции $f_z(x)$, где $x \in \mathbb{R}$, $z \in G \subset \mathbb{C}$, причем G – область в $\mathbb{C}$. Пусть $f_z(x)$ локально интегрируема по x при всех $z \in G$. Тогда она задает регулярную обобщенную функцию f_z посредством $\int dx\, f_z(x)\phi(x)$ в предположении, что $\phi \in \mathscr{D}$ (для $\phi \in \mathscr{S}$ нужно сделать предположение о полиномиальном росте на бесконечности). Более того, предположим, что указанный интеграл задает аналитическую функцию z в рассматриваемой области для любой основной функции. Если эта функция допускает аналитическое продолжение вне области G, то мы получаем регуляризацию исходной функции $f_z(x)$ в некоторой области, содержащей G, причем уже как обобщенную функцию, вообще говоря. Рассмотрим в качестве примера функцию

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0, \\ 0. & x < 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

которая задает регулярную обобщенную функцию посредством равенства

$$(x_+^\lambda, \phi) = \int\limits_0^{+\infty} dx\, x^\lambda \phi(x), \tag{7.2}$$

при всех λ таких, что $\operatorname{Re}\lambda > -1$. Но предыдущее равенство можно записать как

$$(x_+^\lambda, \phi) = \int\limits_0^1 dx\, x^\lambda[\phi(x) - \phi(0)] + \int\limits_1^{+\infty} dx\, x^\lambda \phi(x) + \frac{\phi(0)}{\lambda+1}, \tag{7.3}$$

что означает, что данная функция λ может быть продолжена аналитически в область $\operatorname{Re}\lambda > -2$, $\lambda \neq -1$. Продолжая таким образом, получаем

$$(x_+^\lambda, \phi) = \int\limits_0^1 dx\, x^\lambda \left[\phi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\phi^{(k)}(0)\right] + \int\limits_1^{+\infty} dx\, x^\lambda \phi(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!(\lambda+k+1)}, \tag{7.4}$$

что продолжает обобщенную функцию x_+^λ по λ в область $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \dots, -n$. Заметим, что при $-n-1 < \operatorname{Re}\lambda < -n$, $n \geq 1$, предыдущее равенство можно упростить:

$$(x_+^\lambda, \phi) = \int\limits_0^{+infty} dx\, x^\lambda \left[\phi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\phi^{(k)}(0)\right]. \tag{7.5}$$

В точках $\lambda = -n$ функция x_+^λ имеет полюса:

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{7.6}$$

и при всех $\lambda \neq -1, -2, \dots$ она удовлетворяет

$$\frac{dx_+^\lambda}{dx} = \lambda x_+^{\lambda-1}. \tag{7.7}$$

Аналогично мы можем ввести функцию

$$(x_-^\lambda, \phi(x)) = \int\limits_{-\infty}^0 dx\, |x|^\lambda \phi(x) = (x_+^\lambda, \phi(-x)), \tag{7.8}$$

так что свойства этой функции аналогичны свойствам рассмотренной выше.

С помощью введенных функций мы можем определить новые:

$$|x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda, \qquad |x|^\lambda \operatorname{sgn} x = x_+^\lambda - x_-^\lambda, \tag{7.9}$$

свойства которых следуют из предыдущего. Кроме того, вводя обобщенные функции

$$(x+i0)^\lambda = \lim_{y\to+0}(x^2+y^2)^{\lambda/2}e^{i\lambda\arg(x+iy)} = \begin{cases} x^\lambda, & x>0 \\ e^{i\pi\lambda}|x|^\lambda, & x<0 \end{cases},$$

$$(x-i0)^\lambda = \lim_{y\to-0}(x^2+y^2)^{\lambda/2}e^{i\lambda\arg(x+iy)} = \begin{cases} x^\lambda, & x>0 \\ e^{-i\pi\lambda}|x|^\lambda, & x<0 \end{cases},$$

мы видим, что

$$(x\pm i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{\pm i\pi\lambda}x_-^\lambda. \tag{7.10}$$

7.2. **Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathscr{S}'$.** Для произвольной основной функции определим преобразование Фурье посредством

$$F[\phi](\xi) = \int dx\, e^{ix\xi}\phi(x), \qquad F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi}\int d\xi\, e^{-ix\xi}\psi(\xi).$$

Часто используется обозначение $\widetilde{\phi(x)} = F[\phi(x)]$. При этом $\mathscr{S}\to\mathscr{S}$, а $\mathscr{D}$ переходит в пространство аналитических функций. Если обобщенная функция f задается абсолютно интегрируемой функцией $f(x)$, то ее преобразование Фурье есть

$$F[f](\xi) = \int dx\, e^{ix\xi}f(x),$$

так что для основной функции ϕ и ее Фурье-образа ψ выполняется равенство

$$(F[f](\xi),\psi(\xi)) = 2\pi(f(x),\phi(-x)).$$

Для произвольной обобщенной функции из $\mathscr{S}'$ это равенство является определением преобразования Фурье:

$$(F[f](\xi),\psi(\xi)) = (f(x),F[\psi](x)).$$

Обратное преобразование определяется аналогично. В силу этих определений для любого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами P имеем

$$P\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)F[f](\xi) = F[P(ix)f(x)](\xi).$$

Свойства преобразования Фурье:

- $\partial_\xi^n(F[f](\xi)) = F[(ix)^n f](\xi)$,
- $F[\partial_x^n f] = (-i\xi)^n F[f]$,
- $F[f(x-x_0)] = e^{ix_0\xi}F[f]$,
- $F[f](\xi+\xi_0) = F[e^{ix\xi_0}f](\xi)$,
- $F[f(x)\times g(x')] = F[f](\xi)\times F[g](\xi')$,
- $F[f*g] = F[f]F[g]$,

причем последнее выполняется только если свертка существует, а в правой части возникает произведение обобщенных функций.

Примеры фурье-образов: $F[\delta]=1$, $F[\theta](\xi) = \frac{i}{\xi+i0}$.

Как мы уже говорили, произведения обобщенных функций, вообще говоря, неопределены. Примеры: $\dfrac{1}{x}\delta(x)$, $x\dfrac{1}{x}\delta(x)$. Однако, возможны и исключения, например:

$$\theta(x)\theta(x-a) = \theta(x-a), \qquad a\geq 0.$$

Но в любом случае условия существования свертки контролировать легче, чем условие существования произведения обобщенных функций, поэтому Фурье-образ свертки Фурье-образов обобщенных функций часто берется в качестве определения произведения обобщенных функций. Например, когда одна из обобщенных функций из $\mathscr{S}'$, а другая – обобщенная функция с компактным носителем, или когда их носители ограничены с одной и той же стороны. Пример:

$$(\theta*\theta)(x) = \theta(x)x.$$

Если свертка определена, то

$$\partial_x(f * g) = (\partial_x f) * g \equiv f * \partial_x g.$$

Так, используя свертки Фурье-образов, имеем, что существует произведение:

$$\frac{1}{\xi + i0}\frac{1}{\xi + i0} = \frac{1}{(\xi + i0)^2}$$

Литература к лекции 7: И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов "Обобщенные функции и действия над ними", гл. II; В.С.Владимиров , В.В.Жаринов "Уравнения математической физики", Г.Бремерман, "Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье".

8. Лекция 8

8.1. Обобщенные функции комплексного переменного. Обобщенные функции комплексного переменного определяются по аналогии с обобщенными функциями вещественного переменного и мы не будем останваливаться на этих определениях. Отметим только, что везде далее обозначение типа $\phi(z)$, $f(z)$, где $z = x+iy \equiv z_{\mathrm{Re}}+iz_{\mathrm{Im}}$, как для основных, так и для обобщенных функций не предполагает, что это функции аналитические, а является сокращенным обозначением для функций двух вещественных переменных, соответственно, $\phi(x,y)$ и $f(x,y)$. Мы используем здесь следующие обозначения:

$$d^2z = dxdy = \frac{dz \wedge d\overline{z}}{2i}, \tag{8.1}$$

$$\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \overline{\partial_z} \equiv \partial_{\overline{z}} \equiv \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{8.2}$$

и преполагаем, что из курса анализа известны формулы Грина

$$2i\int_D d^2z\ \partial_{\bar z} f(z) = \oint_{\partial D} dz\, f(z), \qquad 2i\int_D d^2z\ \partial_z f(z) = -\oint_{\partial D} d\bar z\, f(z), \tag{8.3}$$

где область D находится слева от контура ∂D при интегрировании по нему, а также формула Коши–Грина:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} dz'\,\frac{f(z')}{z-z'} + \frac{1}{\pi}\int_D \frac{d^2z}{z-z'}\,\partial_{\bar z'} f(z'), \tag{8.4}$$

для $z \in D \setminus \partial D$, где D – ограниченная область в $\mathbb{C}$ с гладкой границей ∂D.

В соответствии со сделанным выше замечанием, пространства $\mathscr{D}$ и $\mathscr{S}$ определяются подобно случаю одной вещественной переменной с очевидным обобщением на рассматриваемый случай двух вещественных переменных. Так запись $\phi(z) \in \mathscr{D}(\mathbb{C})$ означает, что функция $\phi(z)$ бесконечно дифференцируема как функция двух переменных x и y и имеет носитель в ограниченной области в $\mathbb{R}^2$. Аналогично, $\phi(z) \in \mathscr{S}(\mathbb{C})$ означает, что функция $\phi(z)$ бесконечно дифференцируема как функция двух переменных x и y и существуют такие константы C_{m_1,m_2,n_1,n_2} что при всех $\phi(z) \in \mathscr{D}(\mathbb{C})$ означает, что функция $\phi(z)$ бесконечно дифференцируема как функция двух переменных x и y выполнены оценки $x^{m_1}y^{m_2}\partial_x^{n_1}\partial_y^{n_2}\phi(z)| \leq C_{m_1,m_2,n_1,n_2}$. Соответственно обобщаются на случай двух переменных понятие сходимости и определения сопряженных пространств – пространств $\mathscr{D}'(\mathbb{C})$ и $\mathscr{S}'(\mathbb{C})$ обобщенных функций переменной $z \in \mathbb{C}$.

Мы рассмотрим тут только некоторые примеры обобщенных функций комплексного переменного. Дельта-функция определяется как прямое произведение дельта-функций вещественной и мнимой частей:

$$\delta(z) = \delta(z_{\mathrm{Re}})\delta(z_{\mathrm{Im}}), \tag{8.5}$$

так что

$$\int d^2z\delta(z)\phi(z) = \phi(0). \tag{8.6}$$

Отметим также, что для любого $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ выполняется $\delta(az) = |a|^{-2}\delta(z)$.

Обобщенная функция $1/z^n$, $n = 1, 2, \ldots$, в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{C})$ (распределение) определяется посредством равенств

$$\left(\frac{1}{z^n}, \phi\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z|>\epsilon} \frac{d^2z}{z^n}\phi(z),$$

где $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{C})$. В частности

$$\left(\frac{1}{z^2}, \phi\right) = \int_{|z|>1} \frac{d^2z}{z^2}\phi(z) + \int_{|z|<1} \frac{d^2z}{z^2}(\phi(z) - \phi(0)).$$

Показать, что обрезание на уровне $|z|=1$ можно заменить на любое $|z|=a>0$ и значение при этом не изменится. Показать, что из этих определений следует

$$\partial_z \frac{1}{z^n} = -\frac{n}{z^{n+1}}. \tag{8.7}$$

Докажем равентство:

$$\frac{1}{z+\Delta} - \frac{1}{z} = -\frac{\Delta}{z^2} + \pi\overline{\Delta}\delta(z) + o(\Delta), \quad \Delta \to 0,$$

где $o(\Delta)$ означает обобщенную функцию, стремящуюся к нулю при $\Delta \to 0$. Для доказательства рассмотрим:

$$\begin{aligned}
\int d^2z \left(\frac{1}{z+\Delta} - \frac{1}{z}\right)\phi(z) &= \int \frac{d^2z}{z}\left(f(z-\Delta) - \phi(z)\right) = \\
&= -\int \frac{d\overline{z}\wedge dz}{2i}\frac{1}{z}\left(\Delta\partial_z\phi(z) + \overline{\Delta}\partial_{\overline{z}}\phi(z)\right) + o(\Delta) = \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z|>\epsilon}\frac{d^2z}{z}\left(\Delta\partial_z\phi(z) + \overline{\Delta}\partial_{\overline{z}}\phi(z)\right) + o(\Delta) = \\
&= -\Delta\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z|>\epsilon}\frac{d^2z}{z}\partial_z\phi(z) - \overline{\Delta}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z|>\epsilon}\frac{d^2z}{z}\partial_{\overline{z}}\phi(z) + o(\Delta) = \\
&= -\left(\frac{\Delta}{z^2},\phi\right) + \overline{\Delta}\lim_{\epsilon\to 0}\oint\limits_{|z|=\epsilon}\frac{dz}{z}\phi(z) + o(\Delta) = \\
&= -\left(\frac{\Delta}{z^2},\phi\right) + \overline{\Delta}\pi\phi(0) + o(\Delta).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\partial_{\overline{z}}\frac{1}{z} = \pi\delta(z).$$

Заметим, что как и в одномерном случае $z\delta(z)=0$. Однако теперь этому же равенству удовлетворяют все производны дельта-функции по $\overline{z}$: $\partial_{\overline{z}}\delta(z)$, $\partial_{\overline{z}}^2\delta(z)$, и т.д.

9. Лекция 9

9.1. **Периодические обобщенные функции. Основные определения и свойства.** Определим пространство $\mathscr{D}'_T$, где $T>0$, как подмножество $f(x)\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, таких что $f(x+T)=f(x)$ (в смысле обобщенных функций). Стандартным примером периодических обобщенных функций является периодическая дельта-функция:

$$\delta_T(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(x-nT). \tag{9.1}$$

Поскольку для любого $\phi\in\mathscr{S}$ имеем $(\delta_T(x),\phi(x))=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\phi(nT)$, то $\delta_T(x)\in\mathscr{S}'$. Для дальнейшего нам потребуется разложение единицы. Введем неотрицательную четную функцию $e_T(x)\geq 0$, причем $e_T(x)\in\mathscr{D}$ и $\operatorname{supp}e_T\subset\big(-\frac{3T}{4},\frac{3T}{4}\big)$. Более того, потребуем чтобы $e_T(x)=1$ при всех $-\frac{T}{4}<x<\frac{T}{4}$, и $e_T(x-T)=1-e_T(x)$ при $\frac{T}{4}<x<\frac{3T}{4}$. Легко видеть, что тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}e_T(x+nT)=1, \tag{9.2}$$

при всех $x\in\mathbb{R}$. Это разложение единицы позволяет доказать, что для любой $f\in\mathscr{D}'_T$ выполнено

$$f=(e_Tf)*\delta_T. \tag{9.3}$$

Действительно, в силу (9.2):

$$\begin{aligned}f(x)=f(x)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e_T(x+nT)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x)e_T(x+nT)=\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+nT)e_T(x+nT)=(e_Tf)*\delta_T,\end{aligned}$$

где последнее равентство следует из замечания, что для любой обобщенной функции g, для которой существует ее свертка с δ_T по (9.1) выполнено равенство $(g*\delta_T)(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}g(x+nT)$. Доказанное равенство означает, что $\mathscr{D}'_T\in\mathscr{S}'$. Заметим, что в силу его $\delta_T=(e_T\delta_T)*\delta_T$, хотя свертка $\delta_T*\delta_T$ не существует.

Рассмотрим специальный случай, когда обобщенная функция задется функцией локально интегрируемой: $f\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}\cap\mathscr{D}'_T$. Пусть основная функция принадлежит пространству $\phi\in {C^\infty}_T$, т.е. пространству гладких бесконечно дифференцируемых периодических функций с периодом T. Тогда в силу (9.2) имеем:

$$\begin{aligned}\int_0^T dx\,f(x)\phi(x)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^T dx\,f(x)e_T(x+nT)\phi(x)=\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{nT}^{(n+1)T}dx\,f(x-nT)e_T(x)\phi(x-nT)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{nT}^{(n+1)T}dx\,f(x)e_T(x)\phi(x)=\\&=\int dx\,f(x)e_T(x)\phi(x),\end{aligned}$$

Поэтому естественно положить $\forall f\in\mathscr{D}'_T$ и любой основной функции $\phi\in {C^\infty}_T$, что

$$(f,\phi)_T=(f,e_T\phi). \tag{9.4}$$

Из предыдущего замечания следует, что в случае, когда f локально интегрируема, это определение корректно, поскольку не зависит от выбора функции e_T в разложении единицы (9.2). Однако в общем случае этот факт следует доказывать. Пусть функция e'_T задает какое-то другое разложение единицы. Тогда, последовательно используя (9.3), свойства свертки, равенство

(9.1), равенство (9.2) для функции e'_T, получаем:

$$(f, e'_T\phi) = ((e_T f) * \delta_T, e'_T\phi) = \int dx \int dy\, e_T(x) f(x)\delta_T(y)e'_T(x+y)\phi(x+y) =$$
$$= \int dx\, e_T(x)f(x) \int dy\, \delta_T(y)e'_T(x+y)\phi(x+y) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int dx\, e_T(x)f(x)e'_T(x-nT)\phi(x-nT) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int dx\, e_T(x)f(x)e'_T(x-nT)\phi(x) = (f, e_T\phi),$$

где мы воспользовались периодичностью $\phi(x)$. Таким образом определение корректно, что и следовало доказать. Отметим, что в силу этого определения:

$$(9.5)\qquad (e^{im\omega x}, e^{in\omega x})_T = T\delta_{m+n,0}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера.

9.2. **Ряд Фурье.** Здесь для удобства мы положим $T = 2\pi$.

Теорема 9.1. *Для любой обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'_T$ ряд Фурье $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$, где*

$$(9.6)\qquad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}(f, e^{-inx})_{2\pi} \text{ – \textit{коэффициенты Фурье},}$$

сходится к f в $\mathscr{S}'$, т.е.

$$(9.7)\qquad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}.$$

Прежде, чем доказывать эту теорему рассмотрим обычный ряд Фурье для гладкой функции заданной равенством $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4\pi}$ на интервале $0 \le x \le 2\pi$ и повторенной периодически с периодом 2π. По (9.6)

$$c_n(f) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3}, & n = 0, \\ -\frac{1}{n^2}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Итак, $f(x) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{2\pi}\sum_{n\neq 0}\dfrac{e^{inx}}{n^2}$. Производная $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2\pi}$ на интервале $0 \le x \le 2\pi$ и передиочески повторяется на всей оси, а дифференцируя ряд, получаем: $f'(x) = \dfrac{1}{2\pi i}\sum_{n\neq 0}\dfrac{e^{inx}}{n}$. Функция $f'(x)$ разрывна, а потому $f''(x) = -\dfrac{1}{2\pi} + \delta_{2\pi}(x)$. Дифференцируя ряд еще раз, получаем ряд Фурье для периодической дельта-функции:

$$(9.8)\qquad \delta_{2\pi}(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}$$

по построению, сходящийся в $\mathscr{S}'$.

Доказательство теоремы легко следует из равенств (9.3) и (9.4):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}(e_T f) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (e_T f) * e^{inx} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int dx\, e^{in(x-y)} e_T(y) f(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} c_n(f).$$

Таким образом, каждая обобщенная функция из $\mathscr{D}'_T$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье. Нетрудно показать, что для обобщенных функций выполнено равенство Парсеваля $(f, \phi)_T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)c_{-n}(\phi)$, а ряд Фурье можно почленно дифференцировать: $c_n(f^{(\alpha)}) = (in)^\alpha c_n(f)$.

Литература к лекции 9: В.С.Владимиров "Обобщенные функции в математической физики".

10. Лекция 10

10.1. **Обобщенные функции на единичном контуре.** Пусть $\phi(x) \in C^\infty_{2\pi}$. Положим $z = e^{ix}$, $0 \le x \le 2\pi$. Введем функцию $\psi(z)$ комплексной переменной на единичном контуре, $|z| = 1$, посредством $\psi(e^{ix}) = \phi(x)$. Понятно, что если $\psi(z)$ – бесконечно дифференцируемая функция на единичном круге, то $\phi(x) \in C^\infty_{2\pi}$. В частности, для периодической дельта-функции имеем:

$$(\delta_{2\pi}, \phi)_{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int dx \delta(x - 2\pi n) e_{2\pi}(x)\phi(x) = \psi(1).$$

Аналогично, мы любой обобщенной функции $f(x) \in \mathscr{D}'_{2\pi}$ сопоставляем обобщенную функцию $f_c(z)$ (c от слова contour) на единичном круге:

$$(f(x), \phi(x))_{2\pi} = (f_c(z), \psi(z))_c \tag{10.1}$$

Если функция $f(x)$ локально интегрируема, то локально интегрируема и функция $f_c(z) = f(x)$, $z = e^{ix}$, причем

$$(f_c(z), \psi(z))_c = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz} f_c(z)\psi(z), \tag{10.2}$$

а для произвольной обобщенной функции из $\mathscr{D}'_{2\pi}$ правую часть следует понимать как обозначение левой, определенной по (9.4) и (10.1).

Ряд Фурье для обобщенной функции, т.е. равенства (9.6) и (9.7), принимает вид:

$$f_c(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) z^n, \qquad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}(f_c, z^{-n})_c \equiv \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i z^{n+1}} f_c(z) \tag{10.3}$$

В частности по (9.8)

$$\delta_c(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n.$$

Из этого равенства следует аналог формулы Сохоцкого–Племеля:

$$\delta_c(z) = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\right) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ze^{-\epsilon})^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(ze^{\epsilon})^{-n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\left(\frac{1}{z - e^{-\epsilon}} - \frac{1}{z - e^{\epsilon}}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{z - 1^-} - \frac{1}{z - 1^+}\right)$$

где по аналогии со случаем обобщенных функций на вещественной оси мы ввели обобщенные функции

$$\frac{1}{z - 1^\pm} = \lim_{\epsilon\to\pm 0} \frac{1}{z - e^\epsilon},$$

являющиеся пределами функций аналитических внутри и вне единичного контура, соответственно.

10.2. **Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathscr{D}'$.** Введем еще одно пространство основных функций: $\mathscr{Z}$. Это пространство состоит из всех целых функций, удовлетворяющих неравенству $|z^k\psi(z)| \le C_k(\psi)e^{a(\psi)|y|}$, с какой либо постоянной $a(\psi)$, зависящей от ψ. Последовательность $\psi_n(z) \in \mathscr{Z}$ сходится, когда все $a(\psi_n)$ не превосходят некоторого a и функции $\psi_n(z)$ сходятся.

Пусть $\phi(t)$ – некоторая основная функция из $\mathscr{D}$. Поскольку она финитна, то найдется такое $a > 0$, что ее преобразование Фурье

$$\psi(z) = F[\phi] = \int dt\, \phi(t)e^{itz} = \int_{-a}^{a} dt\, \phi(t)e^{itz} \tag{10.4}$$

имеет смысл при всех $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Более того, ясно, что функция $F[\phi(t)](z)$ есть целая аналитическая функция, причем справедлива оценка

$$|z^j \psi(z)| = \left| \int_{-a}^{a} dt\, \phi^{(j)}(t) e^{itz} \right| \le C_j e^{a|y|}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \tag{10.5}$$

таким образом преобразование Фурье есть линейное непрерывное отображение из $\mathscr{D}$ в $\mathscr{Z}$.

Лемма 10.1. *Всякая целая аналитическая функция $\psi(z)$, удовлетворяющая при каждом j оценке (10.5) (т.е. $\psi \in \mathscr{Z}$) есть преобразование Фурье некоторой функции $\phi \in \mathscr{D}$ с носителем* $\mathrm{supp}\phi \subset [-a, a]$.

Доказательство. Функцию $\phi(t)$ определим формулой

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-itx} \psi(x). \tag{10.6}$$

Так как $\psi(x)$ в силу оценки (10.5) убывает при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени, то интеграл в (10.6) сходится абсолютно и равномерно по x (вместе со всеми производными по параметру t). Таким образом $\phi(t)$ – бесконечно дифференцируемая функция. Покажем, что она финитна. Сдвинем ось интегрирования параллельно в комплексную плоскость. А именно, в силу теоремы Коши:

$$\int_{-N}^{+N} dx\, e^{-itx} \psi(x) + i \int_{0}^{\tau} dy\, e^{-it(N+iy)} \psi(N + iy) + \int_{+N}^{-N} dx\, e^{-it(x+i\tau)} \psi(x + i\tau) +$$
$$+ i \int_{\tau}^{0} dy\, e^{-it(-N+iy)} \psi(-N + iy) = 0,$$

где τ – любое вещественное число, а N положительно. Учитывая, что при $N \to \infty$ интегралы по вертикальным отрезкам $[N, N + i\tau]$ и $[-N + i\tau, -N]$ стремятся к нулю, имеем

$$\phi(t) = \frac{e^{t\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-itx} \psi(x + i\tau). \tag{10.7}$$

Используя неравенства (10.5) при $j = 0$ и $j = 2$, находим

$$|\psi(z)| \le e^{a|y|} \min\left\{ C_0, \frac{C_2}{|z|^2} \right\} \le C \frac{e^{a|y|}}{1 + |z|^2} \le C \frac{e^{a|y|}}{1 + |x|^2},$$

а тогда по (10.7)

$$|\phi(t)| \le \frac{e^{t\tau}}{2\pi} \int dx\, C \frac{e^{a|\tau|}}{1 + |x|^2} = C' e^{|\tau|(a + t\,\mathrm{sgn}\,\tau)}.$$

Выберем теперь произвольный параметр τ так, что $\mathrm{sgn}\,\tau = -\,\mathrm{sgn}\,t$ и пусть $\tau \to \infty$. Так как C' не зависит отτ, то в пределе получаем 0 при $|t| > a$. Следовательно, при $|t| > a$ функция $\phi(t) = 0$. ■

Таким образом, преобразование Фурье устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathscr{D}$ и $\mathscr{Z}$.

Теперь можно определить преобразование Фурье для обобщенных функций из $\mathscr{D}'$ по формуле

$$(F[f], \psi) = (f, F[\psi]), \quad \text{где } \psi(z) \in \mathscr{Z}, \quad F[\psi](t) = \int dx\, \psi(x) e^{itx}. \tag{10.8}$$

В силу доказанного $F[f]$ является линейным непрерывным функционалом над пространством $\mathscr{Z}$. Поскольку пространство $\mathscr{Z}$ состоит из аналитических функций, то $F[f]$ называют аналитическим функционалом. Аналитические функционалы не вполне заслуживают названия "обобщенные функции". В частности, для аналитических функционалов не определено понятие носителя и "регулярного" аналитического функционала.

Пример. Показать, что

$$(F[e^{\alpha t}], \psi) = \psi(-i\alpha).$$

Литература к лекции 10: Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов "Введение в теорию обобщенных функций Лекционные курсы НОЦ МИАН, Выпуск 5.

11. Лекция 11

11.1. **Связь преобразований Фурье и Лапласа.** Пусть $f(t)$ – локально интегрируемая функция, растущая не быстрее полинома, равная нулю при отрицательных t (в частности, $f(t) \in \mathscr{S}'$ – обобщенная функция умеренного роста, сосредоточенная на положительной полуоси). Тогда ее преобразование Лапласа $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и является аналитическим продолжением преобразования Фурье $F[f](k) = \int_0^\infty e^{ikt}f(t)dt$ при соответствии $k = ip$.

Поэтому для решения задач Коши с положительным временем в обыкновенных дифференциальных уравнениях можно использовать оба преобразования, однако в этом случае преобразование Лапласа сразу же аппелирует к аппарату ТФКП (и применимо к более широкому классу функций с экспоненциальным ростом). В иных задачах, использующих поведение решений при $t < 0$ (тем более в многомерных задачах) приходится ограничиваться преобразованием Фурье.

С другой стороны, пусть обобщенная функция $f(t) \in \mathscr{S}'$ допускает разложение в разность $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$ функций с носителями на положительной и отрицательной полуосях соответственно. Например, если $f(t)$ – локально интегрируемая функция, растущая не быстрее полинома, то $f_+(t) = f(t)\theta(t)$, $f_-(t) = -f(t)\theta(-t)$. Тогда преобразование Фурье $F[f(t)](k)$ есть сумма $F_+(k) = F[f_+(t)](k)$ и $F_-(k) = F[f_-(t)](k)$,

$$F(k) = F_+(k) - F_-(k), \tag{11.1}$$

где функции $F_\pm(k)$ имеют вид преобразований Лапласа функций $f_\pm(t)$ при соответствии $k = \pm ip$ и являются аналитическими функциями в верхней, соответственно, нижней полуплоскостям. Таким образом, разложение (11.1) – это аналитическое представление преобразования Фурье обобщенной функции, осуществляемое двумя преобразованиями Лапласа.

11.2. **Фундаментальное решение оператора Лапласа в размерности 2.** Полагая, как обычно, $z = x + iy = \rho e^{i\phi}$, где $\phi = \arg z$ и $-\pi \le \phi \le \pi$, в силу формул (8.2) имеем:

$$\partial_z = \frac{e^{-i\phi}}{2}\left(\partial_\rho + \frac{1}{i\rho}\partial_\phi\right), \quad \bar{\partial}_z = \frac{e^{i\phi}}{2}\left(\partial_\rho - \frac{1}{i\rho}\partial_\phi\right). \tag{11.2}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(\partial_z \log z, f) &= -(\log z, \partial_z f) = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\phi[\log\rho + 1 + i\phi]e^{-i\phi}f(\rho e^{i\phi}) - \\
&- \frac{1}{2}\int_0^\infty d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\phi[\log\rho - 1 + i\phi]e^{-i\phi}f(\rho e^{i\phi}) + \frac{1}{2i}\int_0^\infty [\log\rho + i\phi]e^{-i\phi}f(\rho e^{i\phi})\Big|_{-\pi}^{\pi} = \\
&= \int_0^\infty d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-i\phi}f(\rho e^{i\phi}) + \pi\int_0^\infty d\rho\, f(-\rho) = \\
&= \left(\frac{1}{z}, f\right) + \pi\int_0^\infty d\rho\, f(-\rho)
\end{aligned}$$

так что

$$\partial_z \log z = \frac{1}{z} + \pi\theta(-z_{\mathrm{Re}})\delta(z_{\mathrm{Im}}), \qquad \overline{\partial_z} \log \overline{z} = \frac{1}{\overline{z}} + \pi\theta(-z_{\mathrm{Re}})\delta(z_{\mathrm{Im}}), \tag{11.3}$$

где второе равеснтво есть комплексное сопряжение первого. Такой же выкладкой получаем, что

$$\partial_{\bar{z}} \log z = -\pi\theta(-z_{\mathrm{Re}})\delta(z_{\mathrm{Im}}), \qquad \partial_z \log \overline{z} = -\pi\theta(-z_{\mathrm{Re}})\delta(z_{\mathrm{Im}}). \tag{11.4}$$

Итак, мы видим, что $\partial_z \log z \ne 1/z$ and $\partial_{\bar{z}} \log z \ne 0$. С другой стороны

$$\partial_z \log|z|^2 = \partial_z(\ln z + \ln\overline{z}) = \frac{1}{z} \tag{11.5}$$

так что в силу (8.1)

$$\partial_z \overline{\partial_z} \log |z| = \frac{\pi}{2}\delta(z). \tag{11.6}$$

Далее, по (8.2) уравнение

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) G(x,y) = \delta(x)\delta(y) \quad \text{эквивалентно} \quad \partial_z \overline{\partial_z} G = 4\delta(z)$$

так что фундаментальное решение оператора Лапласа в двумерном пространстве есть

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+y^2}. \tag{11.7}$$

11.3. **Фундаментальные решения и функции Грина, сведение начальной задачи к задаче с нулевыми начальными данными.** Пусть $u(x)$ кусочно n раз дифференцируемая (в обычном смысле) фунция. Пусть x_k, $k = 1, \dots, N$ означают точки разрыва хотя бы одной из производных $u^{(m)}(x)$ и потребуем, чтобы в каждой такой точке существовали конечные левые и правые пределы всех производных, $u^{(m)}(x_k \pm 0)$. Обозначим обычную производную на интервалах ее существования $u^{(m)}_{\text{кл}}$ и разрывы производных в точках как

$$[u^{(m)}]_k = u^{(m)}(x_k + 0) - u^{(m)}(x_k - 0).$$

Тогда, как следует из одной из задач Листка 3,

$$u'(x) = u'_{\text{кл}}(x) + \sum_{k=1}^{N} [u]_k \delta(x - x_k),$$

так что

$$u''(x) = u''_{\text{кл}}(x) + \sum_{k=1}^{N} [u']_k \delta(x - x_k) + \sum_{k=1}^{N} [u]_k \delta'(x - x_k),$$

и продолжая, имеем:

$$u^{(m)}(x) = u^{(m)}_{\text{кл}}(x) + \sum_{m'=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{N} [u^{(m')}]_k \delta^{(m-m'-1)}(x - x_k).$$

Пусть требуется решить при $x > 0$ начальную задачу для уравнения с постоянными коэффициентами:

$$Lu(x) \equiv \sum_{m=0}^{M} a_m \frac{\partial^m u(x)}{\partial x^m} = f(x),$$
$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \dots, u^{(M-1)}(0) = u_{M-1}.$$

Положим $\widetilde{u}(x) = u(x)\theta(x)$. Тогда

$$\widetilde{u}'(x) = u'(x)\theta(x) + u_0\delta(x),$$
$$\widetilde{u}''(x) = u''(x)\theta(x) + u_1\delta(x) + u_0\delta'(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\widetilde{u}^{(m)}(x) = u^{(m)}(x)\theta(x) + \sum_{m'=0}^{m-1} u_{m'} \delta^{(m-m'-1)}(x).$$

Таким образом, исходная задача свелась к задаче построения обобщенного решения уравнения

$$L\widetilde{u}(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{M} a_m \sum_{m'=0}^{m-1} u_{m'} \delta^{(m-m'-1)}(x)$$

с носителем на интервале $[0, +\infty]$.

11.4. **Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.** Решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$Lu(x) \equiv \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\partial^n u(x)}{\partial x^n} = f(x)$$

в классе гладких дифференцируемых функций основано на свойстве преобразования Фурье:

$$F[\partial_x^n f] = (-ip)^n F[f],$$

где для основных и интегрируемых функций

$$F[\phi](p) = \int dx\, e^{ipx}\phi(x), \qquad F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi}\int dp\, e^{-ipx}\psi(p).$$

Применяя его к обоим частям дифференциального уравнения, получаем уравнение вида

$$P(p)F[u](p) = F[f](p),$$

где полином

$$P(p) = \sum_{n=0}^{N} a_n(-ip)^n.$$

Т.е. формально

$$F[u](p) = \frac{F[f](p)}{P(p)}.$$

Предположим, что такое деление возможно, т.е., что $P(p)$ не имеет вещественных нулей. Тогда, совершая обратное преобразование, получаем

$$u(x) = \int dyG(x-y)f(y),$$

где возникло фундаментальное решение оператора L:

$$G(x) = F^{-1}\left[\frac{1}{P(p)}\right](x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int \frac{dp\, e^{-ipx}}{P(p)},$$

так что

$$LG(x) = \delta(x).$$

Таким образом в данном случае фундаментальное решение существует и определено однозначно, поскольку однозначна процедура деления, в знаменателе нет нулей, так что интеграл существует и сходится. Собственно, то же самое верное и для большего числа измерений.

Рассмотрим более общий случай, когда у полинома $P(p)$ имеются вещественные нули, причем будем считать, что они простые. Как известно, всегда можно записать

$$P(p) = \prod_{n=1}^{n} a_N(-i)^N(p - q_n).$$

Пусть, скажем, q_1 вещественен. Тогда, во-первых, $1/P(p)$ сингулярен и следует выбрать как мы понимаем $1/(p-q_1)$: главное значение, или $1/(p-q_1+i0)$, или $1/(p-q_1-i0)$, или еще как-то. Но после этого возникает проблема неоднозначности – вспомнить задачу $xf(x) = 0$. Ну и так далее для всех вещественных корней полинома $P(p)$.

Литература к лекции 11: И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”, гл. II; В.С.Владимиров , В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”, Г.Бремерман, “Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье”.

12. Лекция 12

12.1. **Фундаментальные решения уравнения Штурма–Лиувилля с нулевым потенциалом и волнового уравнения.** В качестве предварительного упражнения начнем с построения фундаментального решения уравнения Штурма–Лиувилля с нулевым потенциалом:

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - k^2\psi(x) = f(x), \quad \text{где } k \neq 0 \text{ – вещественный параметр},$$

так что

$$-\frac{d^2G(x)}{dx^2} - k^2G(x) = \delta(x).$$

Здесь

$$P(p) = p^2 - k^2$$

а потому

$$F[\psi](p) = \frac{F[f](p)}{(p-k)(p+k)}.$$

Конечно, нужно фиксировать выбор обобщенных функций и учесть неоднозначность деления. Положим

$$F[\psi](p) = \frac{F[f](p)}{(p-k+i0)(p+k+i0)} + c_-\delta(p-k) + c_+\delta(p+k), \tag{12.1}$$

где c_- и c_+ – неопределенные константы (имеется ввиду по p). Совершая обратное преобразование Фурье, получаем

$$\psi(x) = \int dy\, G(x-y,k)f(y) + c_-e^{-ikx} + c_+e^{ikx},$$

$$G(x,k) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{dp\, e^{-ipx}}{(p-k+i0)(p+k+i0)}.$$

Вспоминая задачу 10 из Листка 4, имеем:

$$G(x,k) = \frac{1}{4k\pi}\int dp\, e^{-ipx}\left(\frac{1}{p-k+i0} - \frac{1}{p-k+i0}\right) = -\theta(x)\frac{\sin kx}{k}.$$

Произвол в выборе констант фиксируется граничными условиями, например,

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi_x(0) = 0,$$

что дает:

$$c_\pm = \frac{1}{2}\int dy\left[-G(-y,k) \pm \frac{i}{k}G_x(-y,k)\right]f(y).$$

Ответ так же можно записать в виде

$$\psi(x) = \int dy\, G_0(x,y,k)f(y)$$

где теперь $G_0(x,y,k)$ не есть функция разности:

$$G_0(x,y,k) = \left[\theta(-y) - \theta(x-y)\right]\frac{\sin k(x-y)}{k},$$

$$\psi(x) = \int_0^x dy\, \frac{\sin k(x-y)}{k} f(y).$$

Найдем теперь фундаментальное решение одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \qquad (a > 0)$$

т.е., решение уравнения

$$\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x^2} = \delta(t)\delta(x).$$

Применим, например, к последнему уравнению преобразование Фурье по переменной x:

$$\frac{\partial^2 G(t,k)}{\partial t^2} - a^2 k^2 G(t,k) = \delta(t).$$

При фиксированном k соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение по t было рассмотрено выше; одно из его фундаментальных решений имеет вид

$$G(t,k) = \theta(t)\frac{\sin akt}{ak}$$

Фундаментальное решение волнового уравнения получаем применением к $G(t,k)$ обратного преобразования Фурье. Ответ:

$$G(t,x) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|).$$

Проверим, вычислив преобразование Фурье по x от $G(t,x)$. Поскольку речь идет об обычных локально интегрируемых функциях, достаточно вычислить интеграл

$$F_x[G(t,x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} G(t,x)dx = \int_{|x|<at} e^{ikx}dx = \begin{cases} 0, & t<0, \\ \dfrac{\sin akt}{ak}, & t>0. \end{cases}$$

Решим с помощью полученного фундаментального решения задачу Коши для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \qquad t>0$$
$$u(0,x) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x)$$

Эта задача эквивалентна одному уравнению на обобщенную функцию $v(t,x) = \theta(t)u(t,x)$, сосредоточенную в полуплоскости $t>0$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(t,x)\theta(t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t).$$

В самом деле, производная $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ в смысле обобщенных функций равна

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\theta(t) + u(t)\theta'_t(t) = \frac{\partial u}{\partial t}\theta(t) + u_0(x)\delta(t),$$

аналогично $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\theta(t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t)$.

Поэтому $v(t,x) = G(t,x) * (f(t,x)\theta(t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t))$ и при $t>0$

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, \theta(t-s-|x-y|)\left(f(s,y)\theta(s) + u_0(y)\delta'(s) + u_1(y)\delta(s)\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_0^t ds \int\limits_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} dy f(s,y) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} dy u_1(y) + \frac{1}{2}\left(u_0(x-at) + u_0(x+at)\right)$$

(формула Даламбера).

12.2. **Сведение начальной задачи к интегральному уравнению.** Рассмотрим опять уравнение Штурма–Лиувилля с ненулевым потенциалом (одномерное уравнение Шредингера):

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+u(x)\psi(x)=k^2\psi(x),\quad \text{где } k\neq 0 \text{ – вещественный параметр,}$$

и нулевой "правой частью". Преобразование Фурье в такой ситуации приносит мало пользы, поскольку вместо $u(x)\psi(x)$ мы получим свертку. Однако функция Грина позволяет свести дифференциальное уравнение с начальными данными к интегральному, что дает возможность исследовать свойства решений. Положим в предыдущих формулах $f(x)=-u(x)\psi(x)$, тогда $\psi(x)$ удовлетворяет

$$\psi(x)=c_-e^{-ikx}+c_+e^{ikx}-\int\limits_{-\infty}^{x}dy\,\frac{\sin k(x-y)}{k}u(y)\psi(y).$$

Опять константы фиксируруются начальными условиями. Предположим, что $u(x)$ – гладкая, быстро убывающая на бесконечности функция (например, из $\mathscr{S}$). Тогда естественно ожидать, что на бесконечности $\psi(x)$ ведет себя как решение уравнения с $u(x)=0$. Обозначим $\psi(x,k)\sim e^{-ikx}$ при $x\to-\infty$, точнее, зададим решение $\psi(x,k)$ условием

$$\lim_{x\to-\infty}e^{ikx}\psi(x,k)=1.$$

Перепишем интегральное уравнение в виде

$$e^{ikx}\psi(x)=c_-+c_+e^{2ikx}+\int\limits_{-\infty}^{x}dy\,\frac{1-e^{2ik(x-y)}}{k}u(y)e^{iky}\psi(y),$$

т.е. как интегральное уравнение на $e^{ikx}\psi(x)$. Условие на асимптотике дает $c_-=1$, $c_+=0$. Итак,

$$\psi(x,k)=e^{-ikx}-\int\limits_{-\infty}^{x}dy\,\frac{\sin k(x-y)}{k}u(y)\psi(y,k),$$

$$e^{ikx}\psi(x,k)=1+\int\limits_{-\infty}^{x}dy\,\frac{1-e^{2ik(x-y)}}{k}u(y)e^{iky}\psi(y,k).$$

Мы получили однозначное уравнение, доказательство существования решения которого уже можно проводить, скажем методом последовательных приближений. Вторая версия этого уравнения позволяет доказать, что $\psi(x,k)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость параметра k. Такие решения называются решениями Йоста.

Литература к лекции 12: И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов "Обобщенные функции и действия над ними", гл. II; В.С.Владимиров , В.В.Жаринов "Уравнения математической физики",

13. Лекция 13. Преобразование Радона

13.1. **Определение и основные свойства.** Преобразование Радона – одна из задач **интегральной геометрии**, т.е. области исследований, рассматривающей интегральные преобразования, ставящие в соответствие финкциям на многообразии X их интегралы по подмногообрзиям из какого-либо семейства M. Т.е. возникает соответствие между функциями на многообразии X и функциями на некотором многообразии M его подмногообразий. Например, функциям на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ ставятся в соответствие их интегралы по всевозможным прямым, переводящее функции на $\mathbb{R}^n$ в функции на многообразии прямых. Мы рассмотрим простейший случай: преобразование Радона на евклидовой плоскости, т.е. интегральное преобразование, сопоставляющее функции $f(x_1, x_2)$ на плоскости ее интегралы по всевозможным прямым. Зададим прямую на плоскости уравнением

$$x_1 \cos\phi + x_2 \sin\phi - p = 0,$$

что эквивалентно, можно задать параметрически уравнениями:

$$x_1 = -t\sin\phi + p\cos\phi,$$
$$x_2 = t\cos\phi + p\sin\phi.$$

Таким образом p – растояние прямой от начала координат, t – параметер на прямой, $v = (\cos\phi, \sin\phi)$ – вектор нормали к прямой, при фиксированном p имеем: $dx_1 = -\sin\phi dt$, $dx_2 = \cos\phi dt$, так что элемент длины есть $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = dt^2$, т.е. dt – евклидова мера на такой прямой. Значит многообразие прямых у нас параметризовано парой переменных $\{\phi, p\}$, причем параметрам $\{\phi, p\}$ и $\{\phi', p'\}$ отвечает одна и та же прямая тогда и только тогда, когда $\phi' = \phi + \pi k$, $p' = (-1)^k p$, $k \in \mathbb{Z}$. Это означает, что многообразие прямых на плоскости получается из бесконечного кругового цилиндра с цилиндрическими координатами $\{\phi, p\}$ путем отождествления точек $\{\phi, p\}$ и $\{\phi + \pi, -p\}$.

Преобразование Радона функции $f(x_1, x_2)$ задается равенством

$$\mathscr{R}f(\phi, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(-t\sin\phi + p\cos\phi, t\cos\phi + p\sin\phi). \tag{13.1}$$

Это преобразование можно рассматривать на различных пространствах функций. Мы рассмотрим его для простоты на пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций. В этом случае преобразование Радона $\mathscr{R}f$ – финитная бесконечно дифференцируемая функция на многообразии прямых, т.е. бесконечно дифференцируемая функция от ϕ и p, финитная по p. Впрочем, совсем нетрудно распространить его и на пространство функций Шварца.

Свойства преобразования Радона.

(1) В силу (13.1): $\mathscr{R}(f)(\phi+\pi, -p) = \mathscr{R}f(\phi, p)$, что и означает, что функция $\mathscr{R}f$ есть функция именно на многообразии прямых.

(2) Равенство (13.1) можно записать в виде

$$\mathscr{R}f(\phi, p) = \int dx_1 \int dx_2\, f(x_1, x_2) \int dt\, \delta(x_1 + t\sin\phi - p\cos\phi)\delta(x_2 - t\cos\phi - p\sin\phi) =$$
$$= \int dx_1 \int dx_2\, f(x_1, x_2) \int \frac{dt}{|\sin\phi|}\, \delta\left(t + \frac{x_1}{\sin\phi} - p\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\right) \delta(x_2 - t\cos\phi - p\sin\phi) =$$

(где мы предположили, что $\sin\phi \neq 0$)

$$= \int dx_1 \int dx_2\, f(x_1, x_2) \frac{1}{|\sin\phi|}\, \delta\left(x_2 + \frac{x_1\cos\phi}{\sin\phi} - \frac{p}{\sin\phi}\right) =$$
$$= \int dx_1 \int dx_2\, f(x_1, x_2) \delta(x_1\cos\phi + x_2\sin\phi - p), \tag{13.2}$$

что, очевидно, справедливо и для $\sin\phi = 0$.

(3) Преобразование Радона перестановочно с вращениями плоскости. Пусть дана $f(x_1,x_2)$ и пусть $f^{(\alpha)}(x_1,x_2)=f(x_1\cos\alpha-x_2\sin\alpha,x_2\cos\alpha+x_1\sin\alpha)$. Тогда легко видеть, что

$$\mathscr{R}f^{(\alpha)}(\phi,p)=\mathscr{R}f(\alpha+\phi,p). \tag{13.3}$$

(4) Если $f(x_1,x_2)$ зависит только от расстояния $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ до начала координат, $f(x)=F(r)$, то преобразование Радона зависит только от p:

$$\mathscr{R}f(\phi,p)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\,F(\sqrt{t^2+p^2})=\widehat{F}(p), \tag{13.4}$$

где $\widehat{F}(p)$ – обозначение.

(5) Преобразование Радона перестановочно и со сдвигами плоскости. Пусть дана $f(x_1,x_2)$ и пусть $f^{(y)}(x_1,x_2)=f(x_1+y_1,x_2+y_2)$. Тогда по (13.2) легко видеть, что

$$\mathscr{R}f^{(y)}(\phi,p)=\mathscr{R}f(\phi,p+y_1\cos\phi+y_2\sin\phi). \tag{13.5}$$

13.2. **Обращение преобразования Радона.** Важным свойством преобразования Радона, обеспечившим ему множество приложений, прежде всего в томографии, является его обратимость, т.е. возможность восстановления самой функции $f(x_1,x_2)$ по ее интегралам по прямым. Ввиду указанных свойств преобразования Радона, достаточно научиться восстанавливать функцию в какой-то одной точке, например $f(0,0)$ и начать можно с радиально симметричных функций. Итак, пусть $f(x_1,x_2)=F(r)$. Тогда преобразование Радона задется функцией $\widehat{F}(p)$ по (13.4), т.е.

$$\widehat{F}(p)=2\int\limits_0^{+\infty}dt\,F(\sqrt{t^2+p^2})=\int\limits_{p^2}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t-p^2}}\,F(\sqrt{t}).$$

Это тоже известное интегральное преобразование: преобразование Абеля порядка 1/2. Его обращение дается равенством

$$F(r)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_r^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{p^2-r^2}}\widehat{F}'(p). \tag{13.6}$$

Докажем его. Заметим, что дифференцируя второе равенство в (13.4), получаем

$$\widehat{F}'(p)=p\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+p^2}}F'(\sqrt{t^2+p^2})=2p\int\limits_{p^2}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t-p^2}}\,\frac{\partial F(\sqrt{t})}{\partial t},$$

где в последнем равенстве мы сделали такую же замену, как и выше. Тогда правая часть (13.6) принимает вид:

$$\text{п.ч.}=-\frac{2}{\pi}\int\limits_r^{\infty}\frac{dp\,p}{\sqrt{p^2-r^2}}\int\limits_{p^2}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t-p^2}}\,\frac{\partial F(\sqrt{t})}{\partial t}=$$

(заметим, что здесь $t > p^2 > r^2$)

$$= -\frac{2}{\pi}\int\limits_{r^2}^{+\infty} dt\,\frac{\partial F(\sqrt{t})}{\partial t}\int\limits_{r}^{\sqrt{t}}\frac{dp\,p}{\sqrt{(p^2-r^2)(t-p^2)}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{r^2}^{+\infty} dt\,\frac{\partial F(\sqrt{t})}{\partial t}\int\limits_{r^2}^{t}\frac{dx}{\sqrt{\left(\dfrac{t-r^2}{2}\right)^2-\left(x-\dfrac{t+r^2}{2}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{r^2}^{+\infty} dt\,\frac{\partial F(\sqrt{t})}{\partial t}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int\limits_{r^2}^{+\infty} dt\,\frac{\partial F(\sqrt{t})}{\partial t},$$

что и следовало доказать. В частности из (13.6) следует, что

$$F(0) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dp}{p}\widehat{F}'(p) \equiv -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{p}\widehat{F}'(p), \tag{13.7}$$

причем ввиду того, что $\widehat{F}(p)$ – четная функция, эти интегралы хорошо определены и не требуют регуляризации. Перейдем теперь к общему случаю функции f. Усреднив ее по окружности с центром в точке 0, получаем функцию, зависящую только от расстояния, обозначим ее

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi\, f(r\cos\phi, r\sin\phi). \tag{13.8}$$

Очевидно, что

$$F(0) = f(0,0). \tag{13.9}$$

Пусть $\widehat{F}(p)$ определено вторым равенством в (13.4). Тогда, как легко видеть,

$$\widehat{F}(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi\int dt\, f(\sqrt{t^2+p^2}\cos\phi, \sqrt{t^2+p^2}\sin\phi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi\,\mathscr{R}f(\phi,p), \tag{13.10}$$

где второе равенство следует из (13.1). Мы видим, что $\widehat{F}(p)$ – среднее $\mathscr{R}f(\phi,p)$ по прямым, равноотстоящим от точки $(0,0)$. Теперь, по (13.7) и (13.9) имеем:

$$f(0,0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{p}\widehat{F}'(p). \tag{13.11}$$

Для восстановляния $f(x_1,x_2)$ в произвольной точке x мы воспользуемся свойством 5, указанным выше. Действительно, в силу введенного там обозначения $f(x_1,x_2) = f^{(x)}(0,0)$. Тогда по (13.5)

$$\mathscr{R}f^{(x)}(\phi,p) = \mathscr{R}f(\phi, p + x_1\cos\phi + x_2\sin\phi), \tag{13.12}$$

так что из (13.11) получаем

$$f(x_1,x_2) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{p}\widehat{F}'_p(x_1,x_2;p). \tag{13.13}$$

где, как следует из (13.10) и (13.12)

$$\widehat{F}(x_1,x_2;p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi\,\mathscr{R}f^{(x)}(\phi,p) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi\,\mathscr{R}f(\phi, p + x_1\cos\phi + x_2\sin\phi), \tag{13.14}$$

что завершает построение обратного преобразования. Мы видим, что $\widehat{F}(x_1, x_2; p)$ – среднее функции $\mathscr{R}f(\phi, p)$ по прямым, равноотстоящим от точки $x = \{x_1, x_2\}$.

Пример. Пусть $f(x_1, x_2) = e^{-r^2}$. Тогда по (13.4)

$$\mathscr{R}f(\phi, p) = \sqrt{\pi}e^{-p^2}.$$

Литература к лекции 13: И.М.Гельфанд, С.Г.Гиндикин, М.И.Граев “Избранные задачи интегральной геометрии”, гл. I.