Задачи по группам и алгебрам Ли – 6. Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$.

Зачет по данному листку ставится в случае сдачи 80% пунктов задач без звездочки. Задачи со звездочкой стоят вдвое дороже. Дедлайн 19 декабря.

В данном листке основное поле всегда $\mathbb{C}$, т.е. изучаются комплексные представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Зафиксируем стандартные образующие e, f, h алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, такие, что

$$[e,f] = h,\ [h,e] = 2e,\ [h,f] = -2f.$$

1. а) Докажите, что на всяком конечномерном представлении алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ оператор $h \in \mathfrak{sl}_2$ действует полупросто (т.е. диагонализуемо)с целыми собственными значениями. *Указание:* элемент $ih \in \mathfrak{sl}_2$ является касательным вектором к компактной однопараметрической подгруппе $S^1 \subset SL_2(\mathbb{C})$. **б)** Пусть V – конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, и $V(\lambda)$ – собственное попространство для оператора h с собственным значением λ. Докажите, что $eV(\lambda) \subset V(\lambda{+}2)$, а $fV(\lambda) \subset V(\lambda{-}2)$. **в)** Докажите, что в пространстве V есть вектор v, такой, что $hv = \lambda v$ и $ev = 0$. Такие векторы называются *особыми векторами веса* λ. **г)** Пусть $v \in V$ – особый вектор. Докажите, что подпространство в V, натянутое на векторы вида $f^k v$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, инвариантно, и выпишите действие оператора e на векторрах $f^k v$. **д)** Докажите, что представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, порожденное особым вектором веса λ, неприводимо и имеет размерность $\lambda + 1$. Это представление обычно обозначается V_λ и называется представлением со старшим весом λ. Соответственно, едиственный с точностью до пропорциональности особый векторв V_λ называется старшим вектором.

2. а) Пусть V – конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. *Характером* представления V называется полином Лорана $\chi_V(q) := \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{Z}} q^\lambda \dim V(\lambda)$. Докажите, что $\chi_{V \oplus W}(q) = \chi_V(q) + \chi_W(q)$ и $\chi_{V \otimes W}(q) = \chi_V(q)\chi_W(q)$. **б)** Вычислите характер неприводимого представления V_λ.

3. а) Докажите, что конечномерные представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ вполне приводимы (т.е. раскладываются в прямую сумму неприводимых). **б)** Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ существует единственное неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ размерности n. *Указание:* докажите, что всякое такое неприводимое представление изоморфно V_{n-1}. **в)** Докажите, что всякое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ однозначно определяется своим характером.

4. а) Разложите в прямую сумму неприводимых представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ $V_\lambda \otimes V_\mu$. *Указание:* вычислите характер этого представления. **б)** Найдите кратность вхождения тривиального представления в разложение тензорной степени $V_1^{\otimes n}$.

5. а) Докажите, что элемент $C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2$ (называемый *элементом Казимира*) лежит в центре универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}_2)$. *Указание:* элемент лежит в центре $U(\mathfrak{g})$, если и только если он коммутирует со всеми элементами *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. **б*)** Докажите, что любой элемент алгебры $U(\mathfrak{sl}_2)$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации элементов вида $e^i h^j C^k$ и $f^i h^j C^k$, где i, j, k – целые неотрицательные числа. *Указание:* воспользуйтесь теоремой ПБВ. **в*)** Докажите, что центр алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ порожден элементом C. **г)** Докажите, что элемент Казимира действует скаляром на любом представлении V_λ, и вычислите этот скаляр. *Указание:* воспользуйтесь леммой Шура. **д*)** Докажите, что конечномерные представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ вполне приводимы, не пользуясь *группами* Ли (в частности, не ссылаясь на задачу 1а). *Указание:* разложите представление по собственным значениям элемента Казимира. Внутри каждого корневого подпространства рассмотрите действие элемента Казимира на пространстве старших и младших векторов.