КОНСПЕКТ ЛЕКТОРА, Мера, измеримые функции, интеграл Лебега
математический анализ, 2 курс, 2-3 модуль, 2014–2015
А.М. Красносельский

Лекция 1 (10 ноября 2014)

Итак, мы завершили часть курса, относящуюся к неявной функции, диффеоморфизмам, экстремумам. Теперь начинаем новую тему: теория меры, измеримые функции, интеграл Лебега, разные виды сходимости, пространство L^2.

Мы знаем, что такое множество меры 0 по Лебегу: это множество, которое можно покрыть окрестностями–промежутками–параллелепипедами (конечным или счетным количеством) суммарного сколь угодно малого объема (что такое объем промежутка известно).

Мы знаем, что такое мера Жордана. Это неотрицательное число, которое соотносится каждому множеству, измеримому по Жордану (граница которого — множество меры 0 по Лебегу). Измеримых по Жордану множеств хватало, чтобы построить теорию интеграла Римана (мы формально делали обратную процедуру, вводили сначала интеграл Римана, по нему строили меру Жордана, но обычно идут в другом направлении: сначала меру, потом по ней интеграл).

Для дальнейшей науки измеримых по Жордану множеств мало. Надо продолжить семейство измеримых множеств, включить туда «почти все» множества. Слово «мало» означает примерно следующее.

1. Совершенно естественные множества (рациональные числа) являются неизмеримыми.

2. Рассмотрим множество интегрируемых по Риману на $[0,1]$ функций с нормой

$$\int_0^1 |x(t)|dx, \qquad \text{или} \qquad \sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt}.$$

Это полунормы, единственная аксиома нормы не выполнена — это их $\|x\| = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$. Из этих полунорм можно сделать нормы, но пространства все равно окажутся не полными.

А если заменить меру Жордана мерой Лебега и интеграл Римана интегралом Лебега, то тогда аналогичные пространства окажутся полными и можно применять всю технику функционального анализа.

3. Мера и интеграл Лебега могут быть определены для абстрактных пространств. топологических пространств, для которых не удается определить интеграл Римана.

4. В теории вероятностей естественно возникают именно меры типа Лебега и интеграл Лебега.

Сегодня начну с абстрактной формальной теории.

1. Абстрактная теория меры

1.1. Алгебры множеств. X - основное множество, $\mathbf{A} \subset 2^X$ — семейство подмножеств. Семейство называется *алгеброй множеств* на X, если оно подчиняется следующим аксиомам:
(1) $X \in \mathbf{A}$ — называется *единица* алгебры,
(2) $A \in \mathbf{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathbf{A}$,
(3) $A_1, A_2 \in \mathbf{A} \Rightarrow A_1 \bigcap A_2 \in \mathbf{A}$.
Очевидные свойства:

- пересечение двух алгебр является алгеброй;
- $\emptyset \in \mathbf{A}$;
- пересечение любого конечного числа множеств из $\mathbf{A}$ снова лежит в $\mathbf{A}$;
- $A_1, A_2 \in \mathbf{A} \Rightarrow A_1 \bigcup A_2 \in \mathbf{A}$; (дополнение к объединению есть пересечение дополнений);
- объединение любого конечного числа множеств из $\mathbf{A}$ снова лежит в $\mathbf{A}$;
- $A_1, A_2 \in \mathbf{A} \Rightarrow A_1 \setminus A_2 = A_1 \bigcap (X \setminus A_2) \in \mathbf{A}$, $A_1 \triangle A_2$; $\triangle$ — симметрическая разность, $A \triangle B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B) \in \mathbf{A}$.

Примеры.

- $\mathbf{A} = 2^X$ — алгебра. Несмотря на простоту этого примера, он используется.
- **Обозначение.** Пусть $A \bigcap B = \emptyset$ (A и B — *дизъюнктны*). Обозначаем $\boxed{\boldsymbol{A \coprod B = A \bigcup B}}$. Если употребляем знак дизъюнктного объединения, дизъюнктность подразумевается.

  Пусть $X = A \coprod B$. Тогда $\mathbf{A} = \{\emptyset, A, B, X\}$ — алгебра. Пусть $X = \coprod_{i=1}^{3} A_i$. Тогда $\mathbf{A} = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \coprod A_2, A_3 \coprod A_1, A_2 \coprod A_3, X\}$ — алгебра.
- Пусть X — любое бесконечное множество. Рассмотрим систему множеств, включающую в себя X, пустое множество, все конечные множества, и все дополнения этих множеств до X. Ясно, что пересечение двух таких множеств конечно, если хоть одно из них конечное. Ясно, что пересечение двух бесконечных множеств, дополнения к которым — конечные множества, само такого же вида. Таким образом это — алгебра.
- Пусть снова X — любое континуальное множество, например отрезок на прямой или прямоугольник на плоскости. Рассмотрим систему множеств, включающую в себя X, пустое множество, все конечные и счетные множества, а также все дополнения этих множеств до X. Это тоже алгебра.
- Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Жордану множество, система его подмножеств, измеримых по Жордану, — алгебра.

- Важный пример. Пусть X — промежуток в $\mathbb{R}^n$ (прямоугольник на плоскости). Рассмотрим систему элементарных множеств: множеств, которые можно составить из прямоугольников (открытых, замкнутых, полуоткрытых, но со сторонами, параллельными некоторому базису). Это тоже алгебра.

Утверждение. Объединение счетного (или конечного) числа множеств можно представить в виде дизъюнктного объединения, то есть $\forall\ A_n \in \mathbf{A},\ n \in \mathbb{N}\ \exists B_n \subset A_n,\ B_n \in \mathbf{A} : \bigcup A_n = \coprod B_n$.

Доказательство. $B_1 = A_1,\ B_k = A_k \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j \right), \quad k > 1.$ □

Пусть $\Phi \subset 2^X$ — произвольная система множеств. Рассмотрим $\mathbf{A}_\Phi = \bigcap \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \supset \Phi,\ \mathbf{A}{-}\text{алгебра}\}$. Иными словами $\mathbf{A}_\Phi$ — минимальная алгебра множеств, содержащая Φ. Говорят: Φ *порождает алгебру* $\mathbf{A}_\Phi$ или $\mathbf{A}_\Phi$ *порождена* Φ.

Конструкция. Пусть $\Phi \in 2^X,\ X \in \Phi$. Множества, получаемые из элементов Φ конечным числом операций пересечения и перехода к дополнению, образуют алгебру $\mathbf{A}_\Phi$.

Вроде это очевидно (конструкция приводит к алгебре, ясно, что эта алгебра минимальная). **Пример:** рассмотрим множество прямоугольников P, оно порождает алгебру $\mathbf{A}_P$ элементарных множеств (множеств, которые можно разбить на конечное число прямоугольников).

Определение. *Алгебра $\mathbf{\Sigma} \in 2^X$ называется σ-алгебра, если выполнено условие*

$$\forall\ A_n \in \mathbf{\Sigma},\ n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{справедливо} \quad \bigcup A_n \in \mathbf{\Sigma}.$$

Очевидно, что в σ-алгебре $\forall\ A_n \in \mathbf{\Sigma},\ n = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо $\bigcap A_n \in \mathbf{\Sigma}$.

Определение. *Наименьшая σ-алгебра $\mathbf{\Sigma}_\Phi = \bigcap\{\mathbf{\Sigma} : \mathbf{\Sigma} \supset \Phi,\ \mathbf{\Sigma} - \sigma\text{-алгебра}\}$ порождается Φ.*

Пусть X топологическое пространство (или метрическое, или просто прямая). Тогда σ-алгебра $\mathbf{B}$, порождённая семейством всех открытых подмножеств X, называется σ-алгеброй борелевских множеств на X. Элементы σ-алгебры $\mathbf{B}$ называются *борелевскими множествами.*

К сожалению, в общем случае для σ-алгебры, порождённой семейством множеств, и, в частности, для системы борелевских подмножеств топологического пространства, нет хорошего конструктивного описания, аналогичного рассмотренной конструкции про минимальную алгебру.

Тем не менее, некоторое представление о борелевских множествах можно составить, исходя из следующих соображений. Семейство $\mathbf{B}$ содержит все открытые подмножества пространства X. Поскольку $\mathbf{B}$ — алгебра, она содержит и дополнения ко всем открытым множествам, то есть все замкнутые множества. Как σ-алгебра, она содержит все ***счётные объединения замкнутых множеств*** (такие множества называются множествами класса F_σ). Также $\mathbf{B}$ содержит все ***счётные пересечения открытых множеств*** — множества класса G_δ. Счётные объединения множеств класса G_δ называются множествами класса $G_{\delta\sigma}$; счётные пересечения множеств класса F_σ) называются множествами класса $F_{\sigma\delta}$); счётные объединения множеств класса $F_{\sigma\delta}$)

образуют класс $F_{\sigma\delta\sigma}$); аналогичным образом вводятся борелевские классы $G_{\delta\sigma\delta}$), $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$) и так далее до бесконечности. Все эти классы множеств содержатся в σ-алгебре борелевских множеств, но даже борелевские множества на отрезке не исчерпываются множествами вышеперечисленных борелевских классов.

Важность борелевских множеств обусловлена тем, что множества, естественно возникающие в задачах анализа, множества точек непрерывности, точек гладкости, точек сходимости и т.д., как правило, являются борелевскими множествами, причём не очень далёких борелевских классов.

Пример задачи про G_δ. Функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, является поточечным пределом непрерывных функций (*называется функция 1-го класса по Бэру*). Пример функции 2-го класса по Бэру: функция Дирихле. Задача: если f — функция 1-го класса по Бэру, то $f^{-1}([a,b]) \in G_\delta$ для любого отрезка $[a,b]$.

Чтобы получить все борелевские множества, нужно определить классы F и G не только для случая, когда индексы $\sigma, \delta, \sigma\delta, \delta\sigma, \sigma\delta\sigma, \delta\sigma\delta \ldots$ — конечные последовательности, но и для любых счётных ординалов. Тут мы сталкиваемся с одним из вопросов теории меры, где нужно знание порядковых чисел и трансфинитной индукции. Я не буду это рассказывать.

Пример. Совокупность открытых лучей (a, ∞) порождает σ-алгебру борелевских множеств на прямой.

Для доказательства надо показать, что любое открытое множество порождается семейством открытых лучей. Сначала заметим, что в σ-алгебру входят все замкнутые лучи $(-\infty, a]$, теперь все открытые лучи $(-\infty, a) = \bigcup(-\infty, a-1/n]$, теперь все замкнутые лучи $[a, \infty)$. Поэтому входят все открытые интервалы $(a,b) = \mathbb{R} \setminus \big((-\infty, a] \bigcup [b, \infty)\big)$, и все открытые множества на прямой.

Множества меры 0 по Лебегу (они играли важную роль в критерии интегрируемости по Риману) бывают борелевские и неборелевские. Я не умею приводить простые примеры неборелевских множеств меры 0 по Лебегу.

Произведение σ-алгебр. Дано: $(X_1, \mathbf{\Sigma}_1)$, $(X_2, \mathbf{\Sigma}_2)$ — множества и σ-алгебры на них. Тогда на $X_1 \times X_2$ определена σ-алгебра $\mathbf{\Sigma}_1 \otimes \mathbf{\Sigma}_2$ — минимальная, содержащая все «прямоугольники» $A_1 \times A_2,\ A_i \in \mathbf{\Sigma}_i$.

Прообразы. Теперь рассмотрим такую ситуацию. Пусть есть 2 множества, X и Y и отображение $f : X \to Y$.

Буду использовать прообраз точки $x \in Y$: $f^{-1}(y) = \{x \in X :\ f(x) = y\} \in 2^X$, прообраз множества $A \subset Y$: $f^{-1}(A) = \{x \in X : y :\ f(x) = y,\ y \in A\} \in 2^X$, прообраз системы множеств $F \subset 2^Y$: $f^{-1}(F) = \{B \in 2^X : B = f^{-1}(A),\ A \in F\} \subset 2^X$. В частности, буду использовать прообразы алгебр и σ-алгебр.

Пусть есть произвольная алгебра $\mathbf{A} \subset 2^Y$. Тогда $f^{-1}(\mathbf{A}) \subset 2^X$ также образует алгебру. Это следует из простых соотношений: для любых $A, B \in \mathbf{A},\ A, B \subset Y$ справедливы равенства

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(Y) = X, \quad f^{-1}(A \bigcup B) = f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \bigcap B) = f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B).$$

Аналогично, для произвольной σ-алгебры $\mathbf{\Sigma} \subset 2^Y$ семейство $f^{-1}(\mathbf{\Sigma})$ является σ-алгеброй.

Пусть есть система множеств $F_Y \subset 2^Y$, $Y \in F_Y$. Она порождает алгебру $\mathbf{A}_{F_Y}$ (и σ-алгебру $\mathbf{\Sigma}_{F_Y}$). Рассмотрим прообразы $f^{-1}(F_Y)$, а также $f^{-1}(\mathbf{A}_{F_Y})$ и $f^{-1}(\mathbf{\Sigma}_{F_Y})$; $F_Y \subset \mathbf{A}_{F_Y}$, $f^{-1}(F_Y) \subset f^{-1}(\mathbf{A}_{F_Y})$.

Очевидно, эти прообразы зависят не только от семейства F_Y, но и от отображения f. Например, если f принимает единственное значение, то все прообразы — это либо $\emptyset$, либо X.

Как только что было сказано, множество $f^{-1}(\mathbf{A}_{F_Y})$ — это алгебра, $f^{-1}(\mathbf{\Sigma}_{F_Y})$ — это σ-алгебра.

Теорема. *Справедливы равенства* $f^{-1}(\mathbf{A}_{F_Y}) = \mathbf{A}_{f^{-1}(F_Y)}$ *и* $f^{-1}(\mathbf{\Sigma}_{F_Y}) = \mathbf{\Sigma}_{f^{-1}(F_Y)}$.

Доказательство проведем для σ-алгебр. Включение $f^{-1}(\mathbf{\Sigma}_{F_Y}) \supset \mathbf{\Sigma}_{f^{-1}(F_Y)}$ следует из определения и из включения $f^{-1}(\mathbf{\Sigma}_{F_Y}) \supset f^{-1}(F_Y)$ ($\mathbf{\Sigma}$ — минимальная σ-алгебра). Если нет равенства, то есть множество $x^* \in f^{-1}(\mathbf{\Sigma}_{F_Y})$, причем $x^* \notin \mathbf{\Sigma}_{f^{-1}(F_Y)}$. Рассмотрим отображение g, ставящее каждому элементу x системы множеств $f^{-1}(\mathbf{\Sigma}_{F_Y})$ все элементы $\mathbf{\Sigma}_{F_Y}$, которые при f^{-1} переходят в x. Это отображение фактически обратное к f^{-1}, но на множествах.

Теперь g снова переводит σ-алгебры в σ-алгебры, поэтому образ $g(\mathbf{\Sigma}_{f^{-1}(F_Y)})$ строго меньше $\mathbf{\Sigma}_{F_Y}$, а это невозможно по определению. $\square$

Мы будем использовать эти соображения при определении измеримых функций несколькими лекциями позже.

2. Мера

Конечно-аддитивные меры.

Мера — неотрицательная функция на множествах. *Измеримое множество* — множество, принадлежащее области определения меры.

Определение. *Пусть есть алгебра* $\mathbf{A} \in 2^X$. *Неотрицательная функция* $\mu: \ \mathbf{A} \to [0, \infty)$, $\mu(\emptyset) = 0$, *удовлетворяющая равенству* $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$ *называется мерой (конечно-аддитивной).*

Можно определять меру на системах множеств F, не являющихся алгебрами. Тогда основное условие аддитивности имеет вид

$$A, B, A \coprod B \in F \qquad \Rightarrow \mu\left(A \coprod B\right) = \mu(A) + \mu(B).$$

Свойства. Пусть μ — конечно-аддитивная мера на алгебре $\mathbf{A} \subset 2^X$. Тогда

1. $A, B \in \mathbf{A} \ \Rightarrow \ \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \bigcap B)$;
2. $A, B \in \mathbf{A}, \ A \subset B \ \Rightarrow \ \mu(A) \leqslant \mu(B)$; в частности, $\mu(B) = 0 \ \Rightarrow \ \mu(A) = 0$;
3. $\mu(A) = 0 \ \Rightarrow \ \mu(A \bigcup B) = \mu(B), \ \mu(B \setminus A) = \mu(B)$;
4. $\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \bigcup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$;

5. $\mu\left(\coprod_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n),\ A_k \in \mathbf{A}$;

6. Суббаддитивность: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$.

Последнее равенство можно написать и точнее, пример для $k=3$: $\mu(A\bigcup B\bigcup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A\bigcap B) - \mu(A\bigcap C) - \mu(C\bigcap B) + \mu(A\bigcap B\bigcap C)$.

Примеры.

1. Мера Жордана. Множество измеримых по Жордану подмножеств промежутка $X \subset \mathbb{R}^n$ — алгебра, на ней задана мера Жордана.

2. Множество элементарных подмножеств промежутка $X \subset \mathbb{R}^n$ — алгебра, на ней тоже задана мера Жордана.

3. Пусть алгебра — это множество всех подмножеств конечного множества X. Пусть каждому элементу e_k поставлено в соответствие неотрицательное число p_k. Мера вводится естественным образом. Именно такие алгебры и меры используются в теории вероятности, если $\sum p_k = 1$.

Счетно-аддитивные меры

Пусть $\mathbf{\Sigma} \in 2^X$ — σ-алгебра. Функция $\mu : \mathbf{\Sigma} \mapsto \mathbb{R}^+$, $\mu(\emptyset) = 0$ называется счетно-аддитивной мерой или σ-аддитивной мерой на $\mathbf{\Sigma}$, если для любого дизъюнктного набора множеств $\{A_i\}_{i=1}^{\infty},\ A_i \in \mathbf{\Sigma}$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ справедливо равенство

$$\mu\left(\coprod_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

В определении в правой части стоит сумма ряда. Поскольку все слагаемые неотрицательны, сумма не зависит от порядка слагаемых.

Подчеркну, что в определении речь идет о счетных суммах и объединениях.

Будем полагать, что мера всего множества X конечна.

Лекция 2 (17 ноября 2014)

Итак, на прошлой лекции мы:

1) обсудили алгебры и σ-алгебры множеств, в том числе, порожденные другими семействами множетв,

2) конечную и счетную аддитивность мер,

3) рассмотрели абстрактные конечно аддитивные меры, σ-аддитивные меры,

4) рассмотрели важнейшее понятие борелевских мер,

5) Доказали факт: борелевская σ-алгебра на прямой порождается системой открытых лучей,

6) доказали одну теорему про перестановочность операций взятия полного прообраза и взятия порожденной σ-алгебры.

Свойства.

1. Монотонность: если множества A и B измеримы и $A \subset B$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.
2. Субаддитивность: $\mu(A \bigcup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$ для любых измеримых множеств A и B.
3. $A_n \in \mathbf{\Sigma},\ A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \Rightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k);$
4. Пусть $\mu(A_1) < \infty$, $A_n \in \mathbf{\Sigma},\ A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots \Rightarrow \mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$. Замечание: условие $\mu(A_1) < \infty$ существенно.
5. Счетная субадитивность: $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. В частности, $\mu(A_i) = 0 \Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.
6. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетный набор множеств, $A_i \in \mathbf{\Sigma}$, $\mu(A_i \bigcap A_j) = 0$ при $i \neq j$.

   Тогда $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Это $\sim$ σ-аддитивность, но $\mu(A_i \bigcap A_j) = 0$ вместо $A_i \bigcap A_j = \emptyset$.

Докажем свойство 3. Обозначим

$$B_n = A_{n+1} \setminus A_n,\ A_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_1 \coprod \left(\coprod_{k=1}^{\infty} B_k\right) = A_\infty,\ A_1 \coprod \left(\coprod_{k=1}^{n} B_k\right) = A_{n+1} \ \Rightarrow$$

$$\mu(A_\infty) = \mu(A_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{k\to\infty} \left(\mu(A_1) + \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j)\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k). \qquad \square$$

Докажем свойство 5. По множествам A_n построим $B_n \subset A_n$ так, чтобы $\bigcup A_n = \coprod B_n$. Для этого положим $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus B_1$, $B_3 = A_3 \setminus (B_1 \coprod B_2)$. Теперь

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\coprod_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \qquad \square$$

Ещё **докажем свойство 5** по-другому. Множества $C_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ образуют возрастающую по n цепочку, справедливо неравенство $\mu(C_n) = \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. Теперь по свойству 3

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \lim \mu(C_n) \leqslant \lim \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \qquad \square$$

Ещё **докажем свойство 6**. Введем множество $D = \bigcup\limits_{j,k\in\mathbb{N}, j\neq k} \left(A_j \bigcap A_k\right)$, $\mu(D) = 0$. Теперь пусть $B_j = A_j \setminus D$, к дизъюнктным множествам B_j применим свойство счетной аддитивности и всё получится: $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(B_k \bigcup D)) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. $\square$

Простые примеры. В этих примерах можно считать, что все множества измеримы.

1. Считающая мера. Мера множества равна количеству его элементов.

2. δ-мера Дирака. Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и положим $\mu(A) = 1$, если $x_0 \in A$ и $\mu(A) = 0$, если $x_0 \notin A$.

3. Положим меру любого счетного множества равной 0, а любого несчетного — равной $+\infty$.

4. Измеримое подмножество пространства с мерой само является пространством с мерой: Дано $(X, \mathbf{\Sigma}, \mu)$, пусть $A \in \mathbf{\Sigma}$. Положим $\mathbf{\Sigma}_A = \{B : \ B \subset A, B \in \mathbf{\Sigma}\}$, $\mu_B = \mu(A \bigcap B)$.

5. Пример на $X = \mathbb{N}$, $\mathbf{\Sigma} = 2^{\mathbb{N}}$. Пусть дан ряд $\sum a_n < \infty,\ a_n > 0$. Положим $\mu(s) = \sum_{n\in s} a_n$, $s \in \mathbf{\Sigma}$. Это счетно-аддитивная мера, причем это общий вид меры на таком $\mathbf{\Sigma}$. Для доказательства просто посмотрим меру одноточечных множеств, всё остальное следует из аксиом.

6. Счетная аддитивность конечно аддитивной меры эквивалентна каждому из условий: меры множеств любой убывающей цепочки с пустым пересечением $\to 0$ или меры множеств любой возрастающей цепочки удовлетворяют соотношению $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

   Пусть μ — конечно аддитивная мера, определенная на σ-алгебре $\mathbf{\Sigma} \subset 2^X$. Пусть для любой цепочки множеств $A_n \in \mathbf{\Sigma},\ A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ справедливо соотношение $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$. Тогда μ — σ-аддитивная мера.

   Доказательство. Пусть A_n — счетная дизъюнктная система множеств. Положим $S_1 = A_1, S_k = A_k \coprod S_{k-1}$. Тогда S_k — возрастающая цепочка множества, поэтому

$$\mu(\coprod_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(S_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Определения. *Тройка* $(X, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)$ *называется* пространством с мерой.

Определение важно особенно для теории вероятностей (вероятностная мера $\Leftrightarrow \mu(X) = 1$), там так и начинаются тексты: пусть дано вероятностное пространство $(X, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)$. Причем там множество X вполне бывает конечным, не обязательно $X = \mathbb{R}^n$. Элементы множества называются событиями, мера называется вероятностью.

Пространство $(X, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)$ — *полное*, если $\forall\ A \in \boldsymbol{\Sigma} : \mu(A) = 0$ справедливо $B \subset A \Rightarrow B \in \boldsymbol{\Sigma}$.

Не путать эту полноту с полнотой метрических пространств. Та - главнее!

Назовем множество B *пренебрежимым*, если $\exists A \in \boldsymbol{\Sigma} :\ A \supset B,\ \mu(A) = 0$.

Свойства пренебрежимых множеств.

– если множество B пренебрежимо и $B \in \boldsymbol{\Sigma}$, то $\mu(B) = 0$;

– если множество B пренебрежимо, то и все его подмножества пренебрежимы;

– объединение конечного или счётного семейства пренебрежимых множеств пренебрежимо.

Введем эквивалентность: $A \sim B \Leftrightarrow A \triangle B$ пренебрежимо.

Проверить, что это эквивалентность (рефлексивность и симметричность очевидны, транзитивность следует из включения $A \triangle C \subset (A \triangle B) \bigcup (B \triangle C)$).

Простые свойства.

1. $A \sim B \Rightarrow (X \setminus A) \sim (X \setminus B)$.

Доказательство. $(X \setminus A) \triangle (X \setminus B) = A \triangle B$.

2. $A_n \sim B_n \Rightarrow \bigcup A_n \sim \bigcup B_n,\ \bigcap A_n \sim \bigcap B_n$ (множество индексов n конечно или счетно);

Доказательство. $\bigcup A_n \triangle \bigcup B_n,\ \bigcap A_n \triangle \bigcap B_n \subset \bigcup (A_n \triangle B_n)$.

3. $A \sim B,\ A, B \in \boldsymbol{\Sigma} \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$.

Доказательство. $\mu(A \triangle B) = 0 \Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$, $\mu(A) = \mu(A \bigcap B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A \bigcap B) = \mu(A \bigcap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$.

Пополнение $\boldsymbol{\sigma}$-алгебры по мере. Теперь по пространству $(X, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)$ определим семейство $\boldsymbol{\Sigma}' \in 2^X$: $A \in \boldsymbol{\Sigma}' \Leftrightarrow \exists B \in \boldsymbol{\Sigma} :\ A \sim B$.

Семейство $\boldsymbol{\Sigma}'$ содержит σ-алгебру $\boldsymbol{\Sigma}$ и также образует σ-алгебру.

Доопределим меру μ до меры μ', заданной на $\boldsymbol{\Sigma}'$. Проверить корректность определения!

Теорема. *Мера* μ' *счетно-аддитивна.*

Доказательство. Пусть $A_n \in \boldsymbol{\Sigma}'$ — дизъюнктная последовательность, $B_n \in \boldsymbol{\Sigma}$, $B_n \sim A_n$. Очевидно, $\mu(B_i \bigcap B_j) = 0$ при $i \neq j$. По свойству 6:

$$\bigcup A_n \sim \bigcup B_n :\ \mu'\left(\bigcup A_k\right) = \mu\left(\bigcup B_k\right) = \sum \mu(B_k) = \sum \mu'(A_k) \qquad \square$$

Построенное полное пространство $(X, \boldsymbol{\Sigma}', \mu')$ называется пополнением пространства $(X, \boldsymbol{\Sigma}, \mu)$.

Пространство полно iff оно совпадает со своим пополнением.

Пусть дано пространство с мерой $(X, \mathbf{\Sigma}, \mu)$.

Определение. *Множество $A \in \mathbf{\Sigma}$ называется* ***атом****, если $\mu(A) > 0$ и если $\forall B \in \mathbf{\Sigma},\ B \subset A$ справедливо одно из равенств $\mu(B) = 0$ или $\mu(A \setminus B) = 0$.*

Мера называется безатомной, если нет атомов; мера называется чисто атомарной, если X можно представить в виде объединения конечного или счетного числа непересекающихся атомов.

Примеры: 1) δ-мера Дирака, 2) мера, заданная на множестве натуральных чисел — это чисто атомарные меры.

Пусть дано множество X и σ-алгебра $\mathbf{\Sigma}$. Очевидно, множество всех σ-аддитивных мер является линейным пространством. **Сказать об этом подробнее!**

Теорема. *Любая счетно-аддитивная мера может быть представлена в виде суммы безатомной и чисто атомарной меры. Это представление единственно.*

Доказательство состоит из конечного количества шагов.

1. Если множество эквивалентно атому. то оно само — атом. Очевидно.

2. Если 2 атома не эквивалентны, то мера их пересечения равна 0. Очевидно.

3. Пусть A_n — конечная или счетная последовательность неэквивалентных атомов. Тогда существует дизъюнктная последовательность атомов $B_n \sim A_n$.

Берем $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$. Так как $A_1 \not\sim A_2$, то $B_2 \sim A_2$, $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$. Теперь берем $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \bigcup A_2))$ и так далее.

4. Класс эквивалентности атомов атомарный класс. Мера атомарного класса — мера любого представителя. Сумма мер любого конечного числа атомарных классов не превосходит $\mu(X)$.

5. Существует не более счетного количества атомарных классов. В самом деле, рассмотрим все атомарные классы, меры которых лежат в промежутке $(\frac{1}{2}\mu(X), \mu(X)]$. Их не больше 1. Рассмотрим все атомарные классы, меры которых лежат в промежутке $(\frac{1}{3}\mu(X), \frac{1}{2}\mu(X)]$. Их не больше 2.

Аналогично, при каждом n количество атомарных классов, меры которых лежат в промежутке $[\frac{1}{(}n+1)\mu(X), \frac{1}{n}\mu(X))$, не больше n. Значит, всех атомарных классов не более счетного числа.

6. Существует дизъюнктная последовательность A_n всех атомов (конечная или счетная, она пустая, если нет атомов). Каждый атом эквивалентен одному из перечисленных атомов.

7. Положим $A_\infty = \bigcup A_k$ и определим на $\mathbf{\Sigma}$ меры $\mu_a = \mu(A \bigcap A_\infty)$, $\mu_c = \mu(A \setminus A_\infty)$.

8. Справедливо равенство $\mu = \mu_a + \mu_c$, мера μ_a чисто атомарная, мера μ_c — безатомная.

Мера μ_a чисто атомарная, мы можем явно указать все ее атомы, мера μ_a множеств, не содержащих эквивалентных этим атомам подмножеств, равна 0. Мера μ_c — безатомная, так как новым атомам взяться неоткуда, а все атомы меры μ оттуда изъяты.

9. Единственность разложения. Покажем, что любого другого разложения меры $\mu = \mu_1 + \mu_2$ на чисто атомарную μ_1 и безатомную μ_2 справедливы равенства $\mu_1 = \mu_a$ и $\mu_2 = \mu_c$.

Для этого заметим, что все атомы меры μ_1 эквивалентны атомам меры μ и эквивалентны атомам меры μ_a и значения всех трех мер на атомах совпадают. Отсюда меры μ_1 и μ_a совпадают, совпадают и разложения. □

Теорема. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство (например — квадрат на плоскости). Пусть σ-алгебра содержит все борелевские подмножества. Пусть μ — σ-аддитивная мера. Тогда каждый атом меры μ эквивалентен некоторому одноточечному множеству.*

Условие про сепарабельность и метрическое пространство нужно, вот **контрпример**.

Был пример σ-алгебры: отрезок X, элементы σ-алгебры — это счетные множества и их дополнения. Рассмотрим меру m: мера счетного множества равна 0, мера X равна 1. Здесь X — атом, но он не эквивалентен никакой точке.

Доказательство. Рассмотрим некоторый атом A меры μ. Покроем его счетным множеством кирпичиков–шариков $B_n(\varepsilon)$ диаметра ε. По условию каждый шарик измерим. Мера всех множеств $A\bigcap B_n$ равна нулю или $\mu(A)$, причем хоть один имеет меру $\mu(A)$. Возьмем это множество $A_1 = B_{k_1}\bigcap A$ диаметра ε, это атом, эквивалентный исходному и лежащий целиком внутри A. Теперь сделаем то же самое с множеством A_1 — разобьем его на множества диаметра ε^2, получим эквивалентный атом A_2 диаметра ε^2.

Так мы получили цепочку вложенных множеств $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ Мера всех множеств равна $\mu(A)$, поэтому пересечение их также имеет меру $\mu(A)$, значит, пересечение не пусто. но диаметр пересечения равен нулю, поэтому это будет единственная точка, эквивалентный A атом. □

Теорема (Серпинский). *Пусть μ — счетно-аддитивная безатомная мера на σ-алгебре $\mathbf{\Sigma}$. Тогда для любого $A \in \mathbf{\Sigma}$ и любого $\alpha \in (0,1)$ существует подмножество $B \in \mathbf{\Sigma}$ такое что $\mu(B) = \alpha\mu(A)$.*

Хитрая теорема, в общем виде я её доказывать не буду, теорема трудная, можно её доказывать с использованием леммы Цорна или трансфинитной индукции. Есть еще доказательство с использованием выпуклой теории и теоремы Крейна-Мильмана о том, что всякое выпуклое множество есть выпуклая оболочка точек своей границы. Но это доказательство использует кучу всякой науки из функционального анализа.

Я её расскажу в простом случае, когда X — ограниченное подмножество на плоскости (или $\mathbb{R}^n$), а σ-алгебра содержит все борелевские множества.

Выберем направление и зафиксируем его. Теперь будем рассматривать перпендикулярную прямую, она разделит X на два подмножества: левое и правое.

При движении перпендикулярной прямой функция $f(t)$, значения которой равно мере левого множества, будет монотонная, она принимает значения от 0 до $\mu(X)$. Это значит, что либо значение $\alpha\mu(X)$ принимается функцией, либо мера отрезка $[a, b] = [\lim_{t\to t_0-0} f(t), \lim_{t\to t_0+0} f(t)$ отлична от нуля, причем $a < \alpha\mu(X) < b$. Теперь надо аналогично разделить меру этого отрезка $b-a$ в нужном отношении, а это уже всегда возможно в силу отсутствия атомов. □

Лекция 3 (24 ноября 2014)

Итак, на прошлой лекции мы:

1) Обсудили свойства абстрактных σ-алгебр. В частности, важное и не слишком тривиальное свойство непрерывности про переходе к пределу в возрастающих и убывающих цепочках множеств. Показали, что свойство эквивалентно условию σ-аддитивности.

2) Привели примеры σ-алгебр и σ-аддитивных мер на них.

3) Разложили меры на атомарную и безатомную компоненты и доказали некоторые свойства этих компонент.

Сейчас построим σ-аддитивную меру на плоскости. Не на прямой, так как там есть дополнительные возможности, которых нет на плоскости и в $\mathbb{R}^n$.

Если вместо слова «прямоугольник» говорить «промежуток в $\mathbb{R}^n$», то все будет работать в произвольном $\mathbb{R}^n$.

Мера Лебега. *Существует единственная σ-аддитивную мера в $\mathbb{R}^n$, инвариантная относительно параллельных переносов и такая, что мера стандартного единичного куба равна* 1. *Естественно,* $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$.

Мера элементарных плоских множеств.

Прямоугольники. Будем называть *прямоугольниками* множества $\{(x, y) : \ x \in (a, b), y \in (c, d)\}$ (открытый прямоугольник), $\{(x, y) : \ x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ (замкнутый прямоугольник), а также куча промежуточных вариантов с произведениями других вариантов промежутков, а так же «открытый прямоугольник» + что угодно на границе. Об этом не надо задумываться, всё равно, что там.

Подчеркну, речь идёт только о прямоугольниках со сторонами, параллельными осям. Считается, что выбрана система координат и зафиксирована до конца рассказа.

Мера прямоугольника — его площадь — произведение длин его сторон. Можно сказать, что отрезок — это прямоугольник со стороной 0. Вообще, в $\mathbb{R}^n$ все промежутки меньшей размерности имеют меру 0.

Свойства: неотрицательность, аддитивность (если прямоугольник разбит на конечное число прямоугольников, то справедливо соответствующее равенство).

Важное свойство: пересечение прямоугольников — прямоугольник. Это произносится так: *прямоугольники образуют полукольцо.* Если мы рассматриваем все множества внутри единичного квадрата, то это будет полукольцо с 1.

Про абстрактные полукольца я буду говорить позднее. Дело в том, что точно как я сейчас, начиная с прямоугольников, построю меру Лебега, можно построить меру, начиная с абстрактной меры на любом полукольце.

Элементарное множество — множество, которое можно представить в виде объединения конечного числа прямоугольников. Связность не обязательна! Если можно одним способом, то можно континуальным множеством способов.

Утверждение 1. *Элементарные множества образуют кольцо, то есть объединение, пересечение, разность и симметрическая разность двух элементарных множеств также являются элементарными множествами.*

Если мы будем рассматривать элементарные множества, принадлежащие квадрату (или фиксированному элементарному множеству), то это будет алгебра (квадрат — единица). Эта алгебр порождается полукольцом прямоугольников.

Это не будет σ-алгебра — очевидно.

Доказательство. Пересечение 2х прямоугольников — прямоугольник. Поэтому, если $A = \coprod P_k,\ B = \coprod Q_m$, то $A \bigcap B = (\coprod_k P_k) \bigcap (\coprod_m Q_m) = \coprod_{k,m} \Big(P_k \bigcap Q_m\Big)$. Остальное — так же.

Утверждение 2. *Если элементарное множество A представлено в виде объединения конечного числа дизъюнктных прямоугольников двумя различными способами $A = \coprod P_k = \coprod Q_m$, то $\sum \mu(P_k) = \sum \mu(Q_m)$*

Доказательство. $\displaystyle\sum_k \mu(P_k) = \sum_{k,m} \mu(P_k \bigcap Q_m) = \sum_m \mu(Q_m)$.

Назовем *мерой элементарного множества* сумму мер прямоугольников разбиения. Корректность следует из Утверждения 2. Множество всех элементарных множеств будем обозначать $\mathfrak{A}$.

Конечная аддитивность на $\mathfrak{A}$ следует из Утверждения 2.

Таким образом. на алгебре элементарных множеств задана мера μ, она является продолжением меры на прямоугольниках: каждый прямоугольник — это элементарное множество, его мера, как прямоугольника совпадает с его мерой, как элеиентарного множества.

Утверждение 3 ($\boldsymbol{\sigma}$-субаддитивность меры на элементарных множествах). *Пусть $A \in \mathfrak{A},\ A_n \in \mathfrak{A},\ n = 1, 2, \ldots,$ причем $A \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.* Тогда $\mu(A) \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Доказательство.

1. Сначала зафиксируем $\varepsilon > 0$.

2. Потом построим замкнутое элементарное множество $A^* \subset A \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющее $\mu(A^*) \geqslant \mu(A) - \varepsilon/2$. Каждый из прямоугольников, составляющих A, заменим замкнутым чуть меньшим.

3. Потом по каждому множеству $A_n \in \mathfrak{A}$ построим открытое элементарное множетво $A_n^* \supset A_n \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющее $\mu(A_n^*) \leqslant \mu(A_n) + \varepsilon/2^{n+1}$.

4. По построению, $A^* \subset \bigcup A_n^*$.

5. Выберем по лемме Гейне–Бореля из бесконечного открытого покрытия A_n^* замкнутого множества A^* конечное подпокрытие $\{A_{n_1}^*, \ldots, A_{n_M}^*\}$ из M множеств. При этом $\mu(A^*) \leqslant \sum_{j=1}^{M} \mu(A_{n_j}^*)$.

6. Теперь $\mu(A) \leqslant \sum \mu(A_n) + \varepsilon$, так как ε произвольно, то всё доказано. □

Утверждение 4 ($\boldsymbol{\sigma}$-аддитивность меры на элементарных множествах). *Теперь пусть* $A, A_n \in \mathfrak{A}$ *и* $A = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$. *Тогда* $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Доказательство. В силу конечной аддитивности при любом N

$$A \supset \coprod_{n=1}^{N} A_n \Rightarrow \mu(A) \geqslant \mu\left(\coprod_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

переходим к пределу, $\mu(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, из σ-субаддитивности следует σ-аддитивность. □

Замечание 1. Может показаться, что мы просто перешли к пределу, это не так! Использовали кучу всего, например, лемму Гейне–Бореля. Из аддитивности σ-аддитивность не следует.

Замечание 2. Это мы определили плоскую σ-аддитивную меру на элементарных множествах. Теперь надо распространить меру на другие множества, важно охватить борелевскую σ-алгебру.

Замечание 3. Вообще-то, $A_n, \coprod_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ — это странная конструкция. Может быть, правильнее формулировать так: $A \in \mathfrak{A},\ A_n \in \mathfrak{A},\ A \supset \coprod_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Лебегова мера плоских множеств. Пусть основное множество $X = [0,1] \times [0,1]$.

Определение внешней меры. Для любого $A \in 2^X$ положим

$$\mu^*(A) = \inf_{P_k\colon \bigcup P_k \supset A} \sum \mu(P_k) \qquad (P_k - \text{прямоугольники}).$$

Берутся конечные или счетные системы прямоугольников. Если брать в определении не прямоугольники, а элементарные множества, получим то же самое.

Если $A \in \mathfrak{A}$, то $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Замечание. Замечу, что это определение хорошо коррелирует с определением «множеств меры ноль по Лебегу», которое мы давали в конце прошлого года. Оно использовалось, в частности, в формулировке критерия интегрируемости по Риману (сформулировать), в формулировке измеримости множества по Жордану (сформулировать).

Теорема. *Внешняя мера σ-субаддитивна на 2^X: $A \subset \bigcup A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum \mu^*(A_n)$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, докажем $\mu^*(A) \leqslant \sum \mu^*(A_n) + \varepsilon$, отсюда всё будет следовать. Каждое множество A_n покроем системой прямоугольников $P_{k,n}$ с точностью до $\varepsilon/2^{n+1}$:

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{n,k}, \qquad \mu^*(A_n) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_{n,k}) - \varepsilon/2^{n+1}$$

и всё получится: $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_{n,k}$ и

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} P_{n,k}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu(P_{n,k})\right) \leqslant \sum \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

Существенно использована σ-аддитивность меры на элементарных множествах. □

Определение измеримого множества 1. *Множество A называется* измеримым по Лебегу*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{A}$: справедливо $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.*

Замечание про меру Жордана. *Очевидно, что каждое измеримое по Жордану множество измеримо по Лебегу.*

В самом деле, для всякого измеримого по Жордану множества таких $B \in \mathfrak{A}$, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$ было 2, одно из которых лежало внутри A, другое содержало A. Это вовсе не означает, что измеримые множества — это элементарные + меры 0 по Лебегу.

Напомню, что все прямоугольники из единичного квадрата, мера которого равна 1.

Определение измеримого множества 2. *Множество A называется* измеримым по Лебегу*, если $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = 1 = \mu(X)$.*

Иначе: внутренняя мера A — это $\mu_*(A) = 1 - \mu^*(X \setminus A)$. Тогда определение 2 имеет вид: *«Множество A называется* измеримым по Лебегу*, если его внутренняя и внешняя мера совпадают».*

Здесь 1 в равенстве — это мера квадрата, в котором всё лежит.

Это определение очень похоже на определение меры по Жордану. Там тоже речь шла о равенстве внутренней и внешней меры. Но разница большая. В определении внешней меры Жордана были конечные системы прямоугольников. Поэтому верхняя мера Лебега множества рациональных чисел равна 0, а верхняя мера Жордана множества рациональных чисел равна 1. Соответственно, внутренняя мера определяется по-другому. В частности, внутренняя мера Жордана множества иррациональных чисел на $[0, 1]$ равна 0, а внутренняя мера Лебега этого множества равна 1 (так как у множества рациональных чисел верхняя мера Лебега равна 0).

Определение меры. *Лебегова мера измеримого множества — его внешняя мера.*

Что то же (по определению 1): по $\varepsilon_n \searrow 0$ строим $B_n \in \mathfrak{A}$, тогда $\mu(A) = \lim \mu(B_n)$.

Замечание. То, что мы называли «множество меры 0 по Лебегу» вполне вписывается.

Ближайшие цели (последовательность не вполне такая):

1. Эквивалентность определений — будем пользоваться первым определением и докажем теорему «тогда и только тогда»;

2. Множество измеримых подмножеств X образует σ-алгебру $\mathfrak{L}$;

3. μ — это σ-аддитивная мера на σ-алгебре $\mathfrak{L}$;

4. Для множеств, измеримых по Жордану, мера Лебега совпадает с мерой Жордана. Инвариантность меры Лебега относительно движений;

5. Открытые множества измеримы. Значит, борелевская σ-алгебра включена в σ-алгебру измеримых по Лебегу множеств;

6. Конструирование других мер (полукольца).

Лемма 1. $A \in \mathfrak{L} \Rightarrow (X \setminus A) \in \mathfrak{L}$ (это аксиома алгебры).

Следует из равенства $(X \setminus A) \triangle (X \setminus B) = A \triangle B$.

Лемма 2. $A_n \in \mathfrak{L},\ n = 1, \ldots, N \Rightarrow \bigcap A_n \in \mathfrak{L},\ \bigcup A_n \in \mathfrak{L}$ (другая аксиома алгебры).

Доказательство достаточно провести для $N = 2$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $A_1, A_2 \in \mathfrak{L}$, тогда $\exists B_1, B_2 \in \mathfrak{A}$: справедливо $\mu^*(A_i \triangle B_i) < \varepsilon/2$.

$$(A_1 \bigcup A_2) \triangle (B_1 \bigcup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \bigcup (A_2 \triangle B_2),\ \Rightarrow$$
$$\mu^* \Big((A_1 \bigcup A_2) \triangle (B_1 \bigcup B_2) \Big) \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon. \qquad \square$$

Следствие. *Разность и симметрическая разность двух измеримых множеств измеримы.*

Доказали, что измеримые множества образуют алгебру.

Лемма 3. $\forall A, B \in 2^X :$ *справедливо* $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$.

Утверждение следует из

$$A \subset B \bigcup (A \triangle B),\ B \subset A \bigcup (A \triangle B) \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B),\ \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B). \quad \square$$

Лемма 4. *Мера μ аддитивна: $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{L}$ справедливо $\mu\left(A_1 \coprod A_2\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.*

Доказательство. Выберем $B_i \in \mathfrak{A} :\ \mu^*(A_i \triangle B_i) < \varepsilon$. Так как $A_1 \bigcap A_2 = \emptyset$, то

$$B_1 \bigcap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \bigcup (A_2 \triangle B_2) \Rightarrow \mu(B_1 \bigcap B_2) < 2\varepsilon.$$

Это соотношение увидеть легко: если $x \in B_1 \bigcap B_2$ и $x \notin A_i \Rightarrow x \in A_i \triangle B_i$.

Теперь из Леммы 3 следует $|\mu(B_i) - \mu^*(A_i)| < \varepsilon$. Так как на $\mathfrak{A}$ мера аддитивна, то

$$\mu(B_1 \bigcup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \bigcap B_2) \geqslant \mu(A_1) + \mu(A_2) - 4\varepsilon.$$

Теперь заметим, что $(A_1 \coprod A_2) \triangle (B_1 \bigcup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \bigcup (A_2 \triangle B_2)$ (проверяется непосредственно),

$$\text{Из Леммы 3} \Rightarrow \mu^*(A_1 \coprod A_2) \geqslant \mu(B_1 \bigcup B_2) - \mu^* \Big((A_1 \coprod A_2) \triangle (B_1 \bigcup B_2) \Big) \geqslant$$
$$\geqslant \mu(B_1 \bigcup B_2) - 2\varepsilon \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, $\Rightarrow \mu^*(A_1 \coprod A_2) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$, в другую сторону следует из субаддитивности, отсюда все доказано. $\square$

Лекция 4 (01 декабря 2014)

Итак, на прошлой лекции мы:

1) Начали конструкцию плоской σ-аддитивной меры Лебега;

2) Доказали σ-субаддитивность меры на алгебре элементарных множествах;

3) Дали определение верхней меры произвольного множества; определение измеримого множества и его меры;

4) Доказали σ-субаддитивность верхней меры;

5) Доказали, что измеримые множества образуют алгебру и что мера — конечно аддитивна.

Теперь переходим к σ-аддитивности меры. Первое утверждение: измеримые множества образуют σ-алгебру.

Лемма 5. $A_n \in \mathfrak{L},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap A_n, \bigcup A_n \in \mathfrak{L}$, *то есть сумма и пересечение счетного числа измеримых множеств — измеримые множества.*

Доказательство. Докажем $A = \bigcup A_n \in \mathfrak{L}$, для $\bigcap A_n \in \mathfrak{L}$ достаточно воспользоваться

$$\bigcap A_n = E \setminus \bigcup (E \setminus A_n)\,.$$

Положим $A_1' = A_1,\ A_n' = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Ясно, что $A_n' \in \mathfrak{L}$ — дизъюнктный набор, $\coprod A_n' = A$. В силу конечной аддитивности меры Лебега при каждом n

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k') = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k'\right) \leqslant \mu^*(A) \quad (\text{ писать } \mu(A) \text{ ещё нельзя!}).$$

Поэтому ряд $\sum \mu(A_n')$ сходится, по признаку Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ :\ \ \forall n > N(\varepsilon)$ справедливо $\sum_{n>N(\varepsilon)} \mu(A_n') < \varepsilon/2$. Так как $\bigcup_{k=1}^{N} A_k' \in \mathfrak{L}$, то $\exists B \in \mathfrak{A}$: справедливо $\mu^*(B \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k'\right)) < \varepsilon/2$. Поскольку

$$A \triangle B \subset \left(B \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k'\right)\right) \bigcup \left(\bigcup_{n>N} A_n',\right), \qquad \text{и} \qquad \mu^*\left(\bigcup_{n>N} A_n',\right) \leqslant \sum_{n>N(\varepsilon)} \mu(A_n')$$

(это σ-субаддитивность внешней меры), то $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. □

Лемма 6. *Мера Лебега σ-аддитивна, то есть для любого дизъюнктного набора $A_n \in \mathfrak{L},\ n \in \mathbb{N}$ справедливо $\mu\left(\coprod A_n\right) = \sum \mu(A_n)$.*

Доказательство. $\forall N\ \mu\left(\coprod_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \leqslant \mu\left(\coprod_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, поэтому, $\mu\left(\coprod_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, и из σ-субаддитивности (верхней меры, она же обычная) все получается. □

Итак, измеримые по Лебегу множества образуют σ-алгебру и мера Лебега σ-аддитивна.

Теорема. *Множество измеримо по Лебегу, iff внешняя мера равна внутренней.*

Доказательство 1. Пусть множество A измеримо по Лебегу: $\forall\varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{A}$: справедливо $\mu^*(A\triangle B) < \varepsilon$.

Заметим, что $(E \setminus A)\triangle(E \setminus B) = A\triangle B$. Отсюда следует, что $\mu^*\big((E \setminus A)\triangle(E \setminus B)\big) < \varepsilon$. Но $\mu^*(E \setminus B) + \mu^*(B) = 1$, таким образом,

$$|\mu^*\big(E \setminus A\big) + \mu^*(A) - 1| \leqslant 2\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то $\mu^*(E \setminus A) + \mu^*(A) = 1$.

Доказательство 2. Теперь в другую сторону. Пусть $\mu^*(E \setminus A) + \mu^*(A) = 1$. Докажем, что множество A измеримо по Лебегу.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покроем множества A и $E \setminus A$ прямоугольниками B_n и C_n: пусть $A \subset \bigcup B_n,\ E \setminus A \subset \bigcup C_n$ и

$$\mu^*(A) \leqslant \sum \mu(B_n) \leqslant \mu^*(A) + \frac{1}{3}\varepsilon, \qquad \mu^*(E \setminus A) \leqslant \sum \mu(C_n) \leqslant \mu^*(E \setminus A) + \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Возможность такого выбора следует из определения внешней меры.

Так как ряд $\sum \mu(B_n)$ сходится, то при каком-то N хвост ряда меньше $\varepsilon/3$, положим $B = \bigcup_{n=1}^{N} B_n$, это элементарное множество. Покажем, что $\boxed{\mu^*(A\triangle B) < \varepsilon}$.

Так как $P = \bigcup_{n>N} B_n \supset A \setminus B$ и $Q = \bigcup (B \bigcap C_n) \supset B \setminus A$, то $A\triangle B \subset P \bigcup Q$. Теперь $\mu^*(P) \leqslant \varepsilon/3$, то для доказательства теоремы осталось увидеть, что $\mu^*(Q) < \frac{2}{3}\varepsilon$.

Для этого заметим, что

$$\Big(\bigcup B_n\Big) \bigcup \Big(\bigcup (C_n \setminus B)\Big) = E.$$

Это равенство следует из определения: если точка принадлежит B, то она принадлежит $(\bigcup B_n)$, если точка не принадлежит B, то она принадлежит либо хвосту, либо какому-то из C_n.

Из этого равенства следует, что

$$\sum \mu(B_n) + \sum \mu(C_n \setminus B) \geqslant 1.$$

А по построению

$$\sum \mu(B_n) + \sum \mu(C_n) \leqslant \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(A) + \frac{2}{3}\varepsilon = 1 + \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Вычитаем первое равенство из второго, получаем

$$\sum \mu(C_n) - \sum \mu(C_n \setminus B) = \sum \mu(C_n \bigcap B) < 2\varepsilon/3.$$

Теорема доказана. $\square$

Замечания. Примеры измеримых множеств и их мер.

- «Множества меры ноль по Лебегу» из прошлого года измеримы. В частности, измеримо любое счетное множество, его мера равна 0.

- Канторово множество CS нулевой меры на $[0,1]$. напомнить, что концов выкинутых интервалов счетное множество, что они в CS

  Cantor Middle Third Set. На картинке черное — то, что остается.

  Про это множество говорили много раз. Однако меру его всегда считали запросто: Его мера равна мере отрезка минус ряд из мер выкинутых интервалов. Что это значит — я никогда строго не обсуждал. Вот теперь, наконец, можно сказать, что в силу σ-аддитивности меры Лебега всё делалось верно.

  Вообще, пусть выбрасываем на каждом шаге $\alpha \in (0,1)$ от остатка, начиная с единичного отрезка. Тогда мы выбросим весь единичный отрезок:

$$\alpha + \alpha(1-\alpha) + \alpha(1-\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha)^3 + ... = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)} = 1$$

  Например, если выбрасывать на каждом шаге все числа, у которых в n-ичной записи хоть один символ принадлежит набору из k символов, тут $\alpha = k/n$. В главном случае $k = 1, n = 3$.

- Теперь будем для любого промежутка I выбирать канторово множество $CS(I)$. Возьмем промежуток $[0,1]$, на нем канторово множество. Его дополнение — это семейство промежутков I_n. Добавим в каждый промежуток $CS(I_n)$. Получим снова замкнутое множество, добавим снова в каждый промежуток дополнения его канторово множество.

  В результате мы получим всюду плотное множество класса F_σ, Это множество можно описать так: множество чисел, в троичной записи которых 1 встречается бесконечное количество раз.

  Мера Лебега этого множества тоже равна нулю.

- Канторово множество ненулевой меры. Мы знаем, как его строить. Однако раньше все было чисто декоративно. А теперь знакомая конструкция приведет нас честному утверждению, известна счетная аддитивность меры Лебега.

Отметим на $(0,1)$ точки вида $a_n^k = k2^{-n}$, $n = 1,2,3,\ldots,k = 1,2,\ldots,2^n-1$. Рассмотрим интервалы $(a_n^k - \varepsilon 2^{-2n}, a_n^k + \varepsilon 2^{-2n})$. Теперь возьмём и выбросим эти интервалы из $(0,1)$. Общая мера всех выбрасываемых интервалов равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon 2^{-2n}(2^n - 1) \leqslant 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2\varepsilon.$$

Конечно, они будут перекрываться, поэтому мера остатка будет еще больше $1-2\varepsilon$. Если считать точно, то получится

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon 2^{-2n}(2^{n-1}) = \varepsilon.$$

очевидно по построению, что в любой окрестности любой точки отрезка всегда будет дырка.

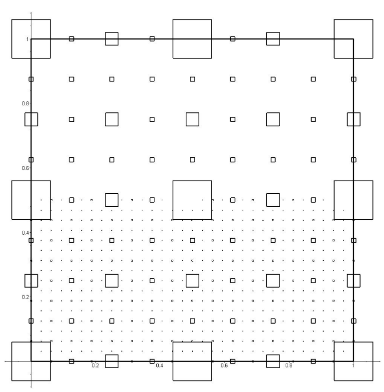
- Это всё — борелевские множества!

- Открытое множество на плоскости — объединение не более чем счетного количества открытых прямоугольников.

  Каждую точку x множества окружаем прямоугольной окрестностью, принадлежащей множеству, она существует по определению. Потом уменьшим чуть эту окрестность так, чтобы точка x принадлежала и чтобы все вершины были рациональные точки. Ясно, что объединение всех таких окрестностей совпадет с исходным множеством. Система прямоугольных окрестностей будет не континуальной, а счетной: всего таких рациональных прямоугольников не более счетного количества.

  Значит все открытые множества — измеримы. Значит, все борелевские измеримы тоже (борелевские множества — минимальная σ-алгебра, измеримые — тоже σ-алгебра, значит борелевские измеримы!

- Выбрасывание окрестностей рациональных чисел. Что от полной меры останется? Как представить себе полученное множество?



В этой ситуации легко посчитать требуемые размеры квадратиков: выкинем менее

$$(2+1)^2\varepsilon^2/2^{2\cdot 1+1} + (2^2+1)^2\varepsilon^2/2^{2\cdot 2+2} + \\ + \ldots + (2^n+1)^2\varepsilon^2/2^{2\cdot n+n}$$

Всего выкинем что-то около ε^2.

- Множества на плоскости, имеющие общую границу. 3 множества и ε-сеть.

- 2 множества на плоскости - прямоугольники и граница.

- Всякое замкнутое множество измеримо, напомнить про G_δ, F_σ, они тоже получаются измеримы... и последующие классы тоже.

- Очевидно, что можно продолжить меру Лебега с квадрата X на всю плоскость. Это момент в общем-то очевидный, я подробно что не буду на нем задерживаться.

  По определению считаем, что взяли счетное количество квадратиков S_n, замостили всю плоскость, множество A называется измеримым, если измеримо его пересечение с любым квадратиком. Мера $\mu(A)$ по определению полагается равной $\sum \mu(A \bigcap S_n)$. Если ряд расходится — неформально говорим, что мера бесконечная.

- Всякое множество, внешняя мера которого равна 0, измеримо ($\mu^*(A \triangle \emptyset) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon$). Всякое подмножество множества меры 0 измеримо.

- Эта мера инвариантна относительно преобразований, не меняющих расстояний. Это теорема. Доказательство такое же, как для меры Жордана, не буду повторяться. Единственность получится, если добавить нормировку.

- Стандартный пример неизмеримого множества на отрезке. Рассказать, что конструктивных примеров нет. Мера на окружности, поговорить, сказать, что надо просто взять меру на полуинтервале. Внутри каждого измеримого множества меры > 0 есть неизмеримое подмножество.

  Пусть $\mu(A) > 0$ для ограниченного A. Рассмотрим те же наборы рациональных сдвигов. Каждый такой набор либо пересекается с A, либо нет. Возьмем те, которые пересекаются. В них проделаем выбор. Полученное множество не может иметь меру 0: будучи сдвинутым на рациональные числа, покроет всё A, и не может иметь меру > 0, счетное множество сдвигов умещается в ограниченном подмножестве. Значит — не измеримо.

  Все следует из σ-аддитивности.

  Ту же конструкцию рассказать на плоскости.

- Рассказать, что на прямой можно делать так. Любое открытое множество — совокупность счетного числа дизъюнктных интервалов (a_n, b_n). Сумма их длин не больше общей длины отрезка. Поэтому мера любого открытого определена. Мера замкнутого тоже определена, как дополнение к открытому. Теперь внешняя мера — это inf по всем объемлющим открытым, внутренняя мера — это sup по всем объемлемым замкнутым. Если внешняя и внутренняя меры совпадают, то множество называется измеримым по Лебегу.

  Здесь использован тот факт, что на прямой меру открытого множества легко определить.

- Напомнить определение пренебрежимого множества: B — *пренебрежимо*, если $\exists A \in \mathbf{\Sigma}$: $A \supset B,\ \mu(A) = 0$. Множество измеримо по Лебегу iff оно есть дизъюнктное объединение множества класса F_σ и пренебрежимого множества. Или G_δ и пренебрежимого. Получается, что хотя борелевские подмножества отрезка и не исчерпываются множествами классов F_σ и G_δ, но они по мере не сильно отличаются от них.

Чтобы доказать, покроем A открытыми B_n, так чтобы $A \subset B_n$ и $\mu(B_n) \leqslant \mu(A) + \frac{1}{n}$. Возьмем пересечение $\bigcap B_n$. Это множество класса G_δ. Если исчерпывать A изнутри замкнутыми множествами, то аналогичная конструкция приведет к множеству F_σ и пренебрежимого.

Абстрактная мера.

Мы фактически с начала модуля рассмотрели 2 конструкции.

Первая — есть абстрактная алгебра или σ-алгебра, на ней задана аддитивная или σ-аддитивная мера. Каковы свойства алгебры и/или меры.

Вторая конструкция — как построить меру на плоскости (или в $\mathbb{R}^n$), чтобы она была σ-аддитивной на некоторой широкой σ-алгебре.

Вторая конструкция была приведена для построения совершенно конкретной меры. А является она чрезвычайно общей. Сама конструкция, не только её результат.

Вот я сейчас попробую рассказать, как можно все обобщить.

Пусть у нас есть множество X и некоторая система его подмножеств $F \subset 2^X$, она называется полукольцом с единицей, если:

1) $X \in F$,

2) $A, B \in F \;\Rightarrow\; A \bigcap B \in F$,

3) $X \setminus A,\; A \in F$ может быть представлено в виде дизъюнктного объединения конечного числа элементов из F.

Основной пример полукольца с единицей — это множество прямоугольников, принадлежащих единичному квадрату (со сторонами, параллельными осям координат).

Теперь рассмотрим алгебру $\mathbf{A}_F$, порожденную полукольцом F. Её аналогом является алгебра элементарных множеств. Как уже говорилось, алгебра $\mathbf{A}_F$ состоит из всех множеств, которые могут быть получены из F за конечное количество операций $\bigcap, \bigcup$. В полукольце это означает, что элементами алгебры $\mathbf{A}_F$ являются множества A, допускающие дизъюнктные представления вида $A = \coprod_{k=1}^n A_k,\; A_k \in F$ и только они.

Естественно, единственности разложения на элементы полукольца нет — как её не было при разложении элементарного множества на прямоугольники.

В одну сторону это утверждение очевидно (каждое множество вида $A = \coprod_{k=1}^n A_k,\; A_k \in F$ должно принадлежать алгебре), в другую сторону это следует из того, что система множеств, допускающих представления вида $A = \coprod_{k=1}^n A_k,\; A_k \in F$ образует алгебру.

Лекция 5 (08 декабря 2014)

Итак, на прошлой лекции мы:

1) Завершили конструкцию плоской σ-аддитивной меры Лебега;

2) Изучили её свойства.

3) Рассмотрели всякие нетривиальные множества на прямой и на плоскости.

4) Начали обсуждать абстрактную конструкцию Лебега построения меры.

Сегодня мы завершим конструкцию Лебега и начнем изучать скалярнозначные функции на прямой.

Многие определения и утверждения справедливы не только на прямой. Иногда буду говорить об этом, иногда не буду, если утверждение специальное для прямой, то буду стараться подчеркивать это.

Зададим на полукольце меру — конечно-аддитивную неотрицательную функцию множества. Мера с F продолжается на $\mathbf{A}_F$ единственным способом.

Продолжение меры происходит по формуле

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k), \qquad A = \coprod_{k=1}^{n} A_k,\ A_k \in F.$$

Единственность такого определения очевидна, следует из аддитивности меры. А корректность определения надо доказать, точно так же, как мы доказывали это, когда вводили меры элементарных множеств.

Пусть $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k = \coprod_{j=1}^{m} B_j$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \mu\left(A_k \bigcap B_j\right) \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k \bigcap B_j\right) \right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j).$$

Вспомним, что мера на элементарных множествах была σ-аддитивная, эту σ-аддитивность мы доказывали с использованием компактности и прочих метрических свойств единицы X, а также тем, что в F есть открытые множества и замкнутые множества. В абстрактном случае, таких свойств нет, надо сразу предположить σ-аддитивность меры на ... на чём?

Это вопрос, на который могут быть разные ответы: на полукольце? на алгебре, полукольцом порожденной?

Здесь справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть мера μ — счетно-аддитивная мера на полукольце F с единицей, тогда её продолжение на алгебру $\mathbf{A}_F$ тоже счетно-аддитивная мера.*

Доказательство. Пусть $A = \coprod_{k=1}^{\infty} B_k$, пусть $A, B_k \in \mathbf{A}_F$. нужно доказать, что $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$. Так как $A = \coprod\limits_{j=1}^{m} A_j,\ B_k = \coprod\limits_{n=1}^{m_k} B_k^n,\ A_j, B_k^n \in F$, то

$$A_j = \coprod_{k=1}^{\infty} \left(B_k \bigcap A_j\right) = \coprod_{k=1}^{\infty} \coprod_{n=1}^{m_k} \left(B_k^n \bigcap A_j\right).$$

В силу счетной аддитивности на семействе F справедливо равенство

$$\mu(A_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m_k} \mu\left(B_k^n \bigcap A_j\right),$$

следовательно

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m_k} \mu\left(B_k^n \bigcap A_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{m_k} \mu\left(B_k^n \bigcap A_j\right)\right) =$$

(теперь работаем с конечными суммами)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{m_k} \bigcup_{j=1}^{m} \left(B_k^n \bigcap A_j\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{m_k} \left(B_k^n \bigcap A\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(B_k \bigcap A\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(B_k\right). \qquad \square$$

Определение. *Пусть есть семейство множеств $\Phi \subset 2^X$. Функция $\mu : \Phi \to \mathbb{R}^+$ называется* ***счетно субаддитивной****, если для любых $A, A_k \subset \Phi$ из включения $A \subset \bigcup A_k$ следует неравенство $\mu(A) \leqslant \sum \mu(A_k)$.*

Теорема (критерий субаддитивности). *Пусть μ — конечно-аддитивная и счетно субаддитивная мера на полукольце F. Тогда она счетно-аддитивная.*

Доказательство. Пусть $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$, нужно доказать, что $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Так как мера субаддитивная, то $\mu(A) \leqslant \sum \mu(A_k)$. Осталось доказать, что $\mu(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Из включения $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$ при любом n и конечной аддитивности следует неравенство $\mu(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. $\square$

Абстрактная внешняя мера.

Теперь определим внешнюю меру множеств точно так же как мы делали в случае меры Лебега. Покрываем произвольное множество счетными системами элементов из F или $\mathbf{A}_F$ (это всё равно!) и берем инфимум общей меры.

Определение внешней меры. Для любого $A \in 2^X$ положим

$$\mu^*(A) = \inf_{P_k \in \mathbf{A}_F:\ \bigcup P_k \supset A} \sum \mu(P_k).$$

Берутся конечные или счетные системы множеств P_k.

Свойства внешней меры.

1. Монотонность.
2. Полуаддитивность.
3. Счетная субаддитивность.
4. Верхняя мера — продолжение меры на $\mathbf{A}_F$: если $A \in \mathbf{A}_F$, то $\mu(A) = \mu^*(A)$.

И берем такое же определение, как было раньше, при определении меры Лебега.

Определение измеримого множества 1. *Множество A называется* измеримым по Лебегу*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{A}$: справедливо $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.*

Определение измеримого множества 2. *Множество A называется* измеримым по Лебегу*, если $\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu(E)$.*

Определение меры: для измеримого множества мера совпадает с верхней мерой. Конечно, теперь надо доказать, что получится σ-алгебра, что полученная мера будет σ-аддитивной. Что оба определения определяют один и тот же класс множеств. Но это все делается и делается без привлечения качественно новых идей.

Все, что было сказано приводит нас к утверждению.

Теорема. *Любая счетно-аддитивная мера, заданная на полукольце с единицей, продолжается до счетно-аддитивной меры, заданной на σ-алгебре, порожденной этим полукольцом.*

Измеримые функции.

Пусть X и Y — два множества, пусть $\mathfrak{A}_X \in 2^X$, $\mathfrak{A}_Y \in 2^Y$. Функцию $f : X \to Y$ назовем $(\mathfrak{A}_X, \mathfrak{A}_Y)$-измеримой, если $\forall A \subset \mathfrak{A}_Y \Rightarrow f^{-1}(A) \subset \mathfrak{A}_X$.

Например, если X и Y — метрические или топологические пространства и $\mathfrak{A}_X = \mathfrak{A}_Y$ — системы всех открытых множеств, то $(\mathfrak{A}_X, \mathfrak{A}_Y)$-измеримость — это непрерывность.

Пусть f скалярная функция, заданная на отрезке. Пусть $\mathfrak{A}_X = \mathfrak{A}_Y$ — системы всех промежутков. Тогда $(\mathfrak{A}_X, \mathfrak{A}_Y)$-измеримость — это монотонность!

Это забавные примеры, не более. Не буду говорить об абстрактных примерах, а перейду к измеримым скалярным функциям. Скалярным функциям заданным на отрезке. На отрезке задана обычная мера Лебега.

Все интересное, все факты я буду рассматривать, имея в виду именно такие функции. Однако, большинство определений и теорем (хотя и не все) справедливы справедливы для любых пространств с мерой: есть $(X, \mathbf{\Sigma}, \mu)$ — пространство с мерой, рассматриваем скалярные функции на X, вот для таких функций справедливы многие теоремы, о которых я буду говорить ниже.

Например, это будут функции на промежутке $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега.

Определение. *Функция f называется измеримой (по мере μ, будем писать $f \in \mathfrak{L}$), если при любом $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) < c\}$ измеримо (по мере μ).*

Иными словами, прообраз каждого открытого луча измерим.

Другое определение. *Функция f измерима, если для любого борелевского множества A множество $f^{-1}(A)$ измеримо, можно сказать (L, B)-измерима.*

Иными словами, прообраз каждого борелевского множества измерим.

Теорема. *Определения эквивалентны.*

В одну сторону очевидно (луч — борелевское множество), а в другую нужна дополнительная конструкция.

Пусть при любом $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) < c\}$ измеримо. То есть, измерим прообраз любого открытого луча.

Тогда у нас была такая теорема о σ-алгебрах и прообразах. О том, что можно переставлять значок прообраза произвольного отображения и значок порождения σ-алгебры: $f^{-1}(\mathbf{\Sigma}_F) = \mathbf{\Sigma}_{f^{-1}(F)}$.

А теперь все становится понятно: если F — это система лучей на прямой, то $\mathbf{\Sigma}_F$ — это все борелевские множества, это обычная конструкция, сначала из лучей делаем все интервалы, потом из интервалов и лучей делаем все открытые множества и получаем всю борелевскую σ-алгебру.

Множества $f^{-1}(F)$ по предположению измеримы, система множеств $\mathbf{\Sigma}_{f^{-1}(F)}$ — это минимальная σ-алгебра, которая их содержит, значит $\mathbf{\Sigma}_{f^{-1}(F)} \subset \mathfrak{L}$. $\square$

Сразу подчеркну, что не для любого измеримого A множество $f^{-1}(A)$ измеримо. Только для борелевского A! Вот оказывается, что самые главные, самые нужные измеримые функции — это те, которые «Борель-Лебег» измеримы.

Чуть позднее приведу пример замечательной функции, такой что прообраз измеримого (естественно, не борелевского!) не измерим (в листочках есть про это вопрос?).

Еще иногда важно рассматривать не просто измеримые, но *борелевские* функции. Это те, для которых прообраз каждого борелевского множества, — борелевское множество.

Теорема. *Всякая непрерывная функция — борелевская.*

Прообраз каждого открытого множества при непрерывном отображении — открытое множество. Воспользуемся снова той же теоремой о том, что можно переставлять значок прообраза произвольного отображения и значок порождения σ-алгебры: $f^{-1}(\mathbf{\Sigma}_F) = \mathbf{\Sigma}_{f^{-1}(F)}$. Здесь F — система открытых множеств, $\mathbf{\Sigma}_F$ — система борелевских множеств, $f^{-1}(F)$ — подмножество системы открытых множеств, поэтому σ-алгебра $\mathbf{\Sigma}_{f^{-1}(F)}$ включена в борелевскую сигма алгебру. $\square$

Следствие. *Всякая непрерывная функция — измеримая.*

В самом деле, если прообраз борелевского множества борелевский (в силу теоремы), то он измеримый.

Теорема о сложной функции. *Суперпозиция борелевской и измеримой функции — измеримая функция.*

Если f — борелевская, а $x(t)$ — измеримая, то $f(x(t))$ — измеримая, так как для любого борелевского A прообраз $f^{-1}(A)$ борелевский, и прообраз $x^{-1}(f^{-1}(A))$ измерим, но $(f \circ x)^{-1} = x^{-1} \circ f^{-1}$. $\square$

Это важно: оператор $x(t) \mapsto f\big(x(t)\big)$ должен действовать в функциональном пространстве измеримых функций. Например, если f непрерывна, то оператор (называется *оператор суперпозиции*, иногда *оператор Немыцкого*) действует в C.

Рассуждения, которые точно можно не слушать! Для функций $f(t, x(t))$ все не просто. Суперпозиционная измеримость (СИ). Условия Каратеодори (непрерывность по x почти при каждом t и измеримость по t при каждом x). Точечный предел СИ функций — СИ функция. Непрерывные и измеримые по Борелю функции $f(x)$ — СИ функции.

Условие Каратеодори обеспечивает непрерывность оператора суперпозиции по мере. Если выполнено условие Каратеодори и оператор суперпозиции действует из L^p в L^q, (например, $|f(t,x)| \leqslant k|x| + c$ обеспечивает действие в L^p), то он непрерывен в L^p.

Свойства измеримых функций и теоремы о них.

1. Измеримы прообразы всех промежутков, всех множеств класса F_σ и G_δ, то есть множества $\{x : f(x) > c\}$, $\{x : f(x) \leqslant c\}$, $\{x : f(x) \geqslant c\}$, $\{x : f(x) = c\}$, $\{x : f(x) \in I\}$, где I — любой конечный интервал.

2. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Тогда $\forall \varepsilon\ \exists g : [0,1] \to \mathbb{R} : g$ ограниченная и $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$. Следует из аксиомы Архимеда.

$$A_k = \{x : |f(x)| > k\}, \quad A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset, \qquad \bigcap A_n = \emptyset \Rightarrow \lim \mu(A_n) = 0.$$

   Выберем $k : \varepsilon > \mu(A_k)$ и положим $g(x) = f(x),\ x \in [0,1] \setminus A_k,\ g(x) = k \operatorname{sign}(f(x)),\ x \in A_k$.

   Это свойство можно еще по-другому переформулировать: берем срезку неограниченной функции f: $f_K(x) = \{f(x),\ |f(x)| \leqslant K,\ K \operatorname{sign}\big(f(x)\big),\ |f(x)| > K\}$. Мера тех x, при которых $f(x) \neq f_K(x)$ стремится к 0 при $K \to \infty$.

3. Элементарные операции: сумма, разность, произведение измеримых функций — измеримые функции. Частное тоже, если знаменатель не обращается в ноль. Если функция f измеримая, то $|f|$ тоже измеримая.

   Доказательство. $f \in \mathfrak{L} \Rightarrow a + bf \in \mathfrak{L}$ — очевидно. Если $f, g \in \mathfrak{L}$, то

$$\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\{x : f(x) > r_k\} \bigcap \{x : g(x) < r_k\}\Big),$$

   где r_k — все рациональные числа, занумерованные каким-то образом. Поэтому множества $\{x : f(x) > a - g(x)\} = \{x : f(x) + g(x) > a\}$ измеримы.

   Произведение: $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$, квадрат измеримой — измерим, так как это суперпозиция непрерывной (следовательно, борелевской) функции возведения в квадрат и измеримой функции. дробь $1/f$ измерима — напишем неравенства, разные при $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$.

4. $\min\{f(x), g(x)\}$, $\max\{f(x), g(x)\}$, $\inf\{f_k(x)\}$, $\sup\{f_k(x)\}$ — измеримые функции, так как

$$\{x : \max\{f(x), g(x)\} < c\} = \{x : f(x) < c\} \bigcap \{x : g(x) < c\},$$

$$\{x : \min\{f(x), g(x)\} < c\} = \{x : f(x) < c\} \bigcup \{x : g(x) < c\},$$

$$\{x : \sup\{f_k(x)\} \leqslant c\} = \bigcap \{x : f_k(x) \leqslant c\}.$$

   Это есть в листочках, там еще про $\overline{\lim} f_k$, $\underline{\lim} f_k$ — это я докажу чуть позже.

5. **Определение.** *Простая функция — измеримая функция с конечным или счетным множеством значений.*

   Простые функции похожи на ступенчатые, только у ступенчатых множества, на которых принимаются одинаковые значения - промежутки, а тут - что угодно.

   Теорема. *Функция f с конечным или счетным множеством значений измерима, iff измеримы все множества $\{x : f(x) = c\}$.*

   Теорема. *Ограниченная измеримая функция всегда является равномерным пределом последовательности простых функций, принимающих конечное множество значений.*

   Для доказательства разобьём $(\inf f - .0001, \sup f]$ на промежутки $(y_i, y_{i+1}]$, считаем, что мелкость $< \varepsilon$. Возьмем функцию, которая на множестве $\{x : x \in (y_i, y_{i+1}]\}$ принимает значение y_i. Очевидно, такая функция простая и равномерно отстоит от исходной не более чем на ε. Выберем последовательность $\varepsilon \searrow 0$, получим искомую последовательность.

   Теорема. *Измеримая функция всегда является равномерным пределом последовательности простых функций.*

   Всё то же самое, только надо разбивать ось на счётное количество промежутков.

   Далее мы будем приближать непрерывные функции, измеримые функции ещё всякими: тригонометрическими многочленами, обычными многочленами. Но это потом.

6. Напоминаю: **Борелевская $\boldsymbol{\sigma}$-алгебра** — это минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества. Её элементы — борелевские множества. Не все измеримые множества, даже меры 0, являются борелевскими.

   Функция f называется **измеримой по Борелю**, если прообраз $f^{-1}(A)$ любого борелевского множества A вещественной оси снова является борелевским множеством. Не просто измерим — как у измеримой функции — а именно борелевский.

   Мы доказывали, что непрерывные функции — борелевские, использовали борелевские функции в теореме о измеримости сложной функции.

Любое подмножество множества нулевой меры автоматически измеримо по Лебегу, но может не быть борелевским.
Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{2}(x + c(x))$ на отрезке $[0, 1]$, где $c(x)$ — канторова лестница. Эта функция монотонна и непрерывна, как следствие — измерима. Мера образа канторова множества равна $\frac{1}{2}$, так как мера образа его дополнения равна $\frac{1}{2}$. Поскольку мера образа канторова множества ненулевая, в нём можно найти неизмеримое подмножество A. Тогда его прообраз $f^{-1}(A)$ будет измеримым (так как он лежит в канторовом множестве, мера которого нулевая), но не будет борелевским (поскольку иначе A было бы измеримо как прообраз борелевского множества при измеримом (непрерывном) отображении f^{-1}).

Это одновременно конструкция того, что прообраз измеримого множества даже при непрерывном отображении не обязательно измеримый и конструкция того, что бывает неборелевское множество меры 0.

Это означает, что борелевская σ-алгебра не полная. Её пополнение — полная σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств.

7. Поточечные пределы.

Теорема. $f_n \in \mathfrak{L},\ f_n \to f \Rightarrow f \in \mathfrak{L}$.

Иными словами, поточечный предел измеримых функций — измеримая функция.

Следует из соотношения

$$\{x : f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}. \tag{1}$$

и того, что измеримые множества образуют σ-алгебру.

Доказательство соотношения (1)**.**

1) Пусть $x \in \{x : f(x) < c\}$, тогда $\exists k:\ f(x) < c - \frac{2}{k}$. При этом x справедливо $f_m(x) \to f(x)$. По k построим n такое, что $|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ при всех $m > n$. Из $|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ и $f(x) < c - \frac{2}{k}$ следует $x \in \bigcap_{m>n}\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}$ при этих k и n.

2) Теперь пусть $x \in \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n}\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}$. Тогда при некоторых k и n верно включение $x \in \bigcap_{m>n}\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}$. Перейдем к пределу по m и получим $f(x) \leqslant c - \frac{1}{k}$, следовательно, $f(x) < c$. $\square$

Лекция 6 (15 декабря 2014)

Итак, на прошлой лекции мы:

1) *Завершили конструкцию абстрактной меры Лебега (меру с полукольца продолжили на σ-алгебру).*

2) *Дали 2 определения измеримых функций.*

3) *Доказали, что всякая непрерывная функция — борелевская и доказали теорему о сложной функции.*

4) *Начали изучать свойства измеримых функций — арифметические свойства.*

5) *Доказали теорему: всякая измеримая функция — равномерный предел измеримых простых функций.*

6) *Привели пример неборелевского множества меры 0, он же пример того, что прообраз измеримого при непрерывном отображении может быть неизмеримым!*

7) *Доказали теорему: поточечный предел измеримых функций — измеримая функция.*

8. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m\geqslant n} a_m$, $\quad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{m\geqslant n} a_m$. Из измеримости супремума-инфимума следует измеримость функций $g_n(x) = \sup\limits_{m\geqslant n} f_m(x), h_n(x) = \inf\limits_{m\geqslant n} f_m(x)$, из измеримости предела следует измеримость верхнего предела.

9. Пусть A — измеримое подмножество отрезка. Естественно, называть функцию $f : A \to \mathbb{R}$ измеримой, если для любого борелевского $B \in \mathbb{R}$ измеримо множество $f^{-1}(B) \subset A$.

   Если функция измерима на некотором измеримом множестве, то она измерима и на любом его измеримом подмножестве. Если функция измерима на двух измеримых множествах, то она измерима и на их объединении-пересечении.

10. Назовем функции эквивалентными, если они не совпадают на множестве меры 0. Очевидно, что это соотношение эквивалентности, рассмотрим классы эквивалентности ($f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$). Очевидно, все функции одного класса одновременно измеримы.

    Пусть мера лебегова. В некоторых классах есть непрерывные функции, в некоторых - нет. В том классе, где $sign(x)$ — нет непрерывных. Если есть непрерывная, то одна. Если есть 2 непрерывные и они отличны в какой-то точке, то они отличны в окрестности этой точки, следовательно отличны на множестве положительной меры.

    Классы все не менее, чем континуальны: можно изменить значение в одной точке.

11. Напоминаю термин “*почти всюду*” (свойство E выполнено почти всюду на X, если свойство выполнено всюду кроме множества меры 0). Обращение: что значит “не почти всюду” и что значит “почти всюду не”. Неравенство почти всюду $f(x) \overset{a.e.}{\geqslant} g(x)$ или $f(x) \geqslant g(x)$ *a.e.*, равенство почти всюду $f(x) \overset{a.e.}{=} g(x)$ или $f(x) = g(x)$ *a.e.*

    Сходимость почти всюду $f_n(x) \overset{a.e.}{\to} f(x)$ или $f_n(x) \to f(x)$ *a.e.*

Теорема. $f_n \in \mathfrak{L},\ f_n \overset{a.e.}{\to} f \Rightarrow f \in \mathfrak{L}$. Следует из пункта 7.

12. **Теорема Егорова (1911).** Если $f_n \overset{a.e.}{\to} f$, то на множестве чуть меньшей меры $f_n \rightrightarrows f$:

$$f_n \overset{a.e.}{\to} f \Rightarrow \forall\delta > 0\ \exists E_\delta \subset X: \text{ справедливо } \mu(E_\delta) > \mu(X) - \delta, \text{ и } f_n \rightrightarrows f \text{ на } E_\delta).$$

Доказательство. $f \in \mathfrak{L}$. Положим $E_n^m = \bigcap\limits_{i\geqslant n}\{x : |f_i(x) - f(x)| < \dfrac{1}{m}\}$ и $E^m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n^m$. Очевидно, $E_1^m \subset E_2^m \subset \ldots \subset E_n^m \subset \ldots$ По непрерывности меры $\lim \mu(E_n^m) = \mu(E^m)$. То есть $\forall m \in \mathbb{N}, \delta > 0\ \exists n_0(m)$: справедливо $\mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) < \delta/2^m$. Положим $E_\delta = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}$ и докажем, что E_δ удовлетворяет условиям теоремы Егорова. Сначала докажем равномерную сходимость на E_δ:

$$x \in E_\delta \Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)} \Rightarrow \forall m\, x \in E^m_{n_0(m)} \Rightarrow \forall m \text{ справедливо } |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \text{ при } i > n_0(m).$$

Оценим $\mu(X \setminus E_\delta)$. Сначала заметим, что если в точке x есть сходимость, то $x \in E^m$. Поэтому, $\mu(E^m) = \mu(X)$ при любом m и $\mu(X \setminus E^m_{n_0(m)}) = \mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) < \delta/2^m$. Теперь,

$$\mu(X \setminus E_\delta) = \mu\left(X \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\Big(X \setminus E^m_{n_0(m)}\Big)\right) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu\Big(X \setminus E^m_{n_0(m)}\Big) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta.$$

$\square$

13. **Сходимость по мере:** $f_n \overset{\mu}{\to} f \iff \forall\sigma > 0$ справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\}) = 0$.

Предел по мере измерим. Мы это пока что будем считать выполненным, а потом получим в качестве выхода из теоремы. Считаем, что множества $\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\}$ измеримы.

Единственность предела по мере: если $f_n \overset{\mu}{\to} f$ и $f_n \overset{\mu}{\to} g$, то $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Покажем, предположив, что f и g измеримы, от противного: пусть $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) \neq 0$, тогда $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| > \sigma\}) > \varepsilon$ при некоторых $\sigma, \varepsilon > 0$. Это всё справедливо, так как

$$\mu(\{x : h(x) \neq 0\}) = \mu(\bigcup\{x : \frac{1}{n+1} < |h(x)| \leqslant \frac{1}{n}\}) \neq 0 \Rightarrow \exists n : \mu(\{x : \frac{1}{n+1} < |h(x)| \leqslant \frac{1}{n}\}) > 0.$$

Это противоречит формулам:

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{3}\}) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \mu(\{x : |f_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\sigma}{3}\}) < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\{x : |f(x) - g(x)| > \sigma\} \subset \{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{3}\} \bigcup \{x : |f_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\sigma}{3}\}$$

$\square$

14. **Теорема.** $\mu(X) < \infty$, $f_n \xrightarrow{a.e.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Доказательство. Предельная функция измерима, следует из пункта 7 прошлой лекции.

Положим $E_k(\sigma) = \{x : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \sigma\}$, $R_n(\sigma) = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma)$, $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma)$. Все эти множества измеримы. Так как $R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \ldots$, то в силу непрерывности меры

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\sigma)) = \mu(M).$$

Покажем, что $\mu(M) = 0$. для этого покажем, что если $x_0 \in M$, то $f_n(x_0)$ не сходится к $f(x_0)$. От противного, пусть $x_0 \in M$ и $f_n(x_0) \to f(x_0)$, тогда для данного $\sigma > 0$ $\exists n\ \forall k \geqslant n$ справедливо $|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma$, то есть $x_0 \notin R_n(\sigma) \Rightarrow x_0 \notin M$.

Следовательно, $\mu(R_n(\sigma)) \to 0$, из $E_n(\sigma) \subset R_n(\sigma) \Rightarrow \mu(E_n(\sigma)) \to 0$. □

15. **Контрпримеры**

1. Контрпример к $\boldsymbol{\mu(X) < \infty}$. Пусть $X = \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = 0,\ |x-n| < 1;\ f_n(x) = 1,\ |x-n| \geqslant 1$. Тогда $f_n \to 0$, но не по мере: $\mu(\{x : |f_n(x)| > \frac{1}{2}\}) = 2$.

2. Контрпример к обратному утверждению.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ на $(0,1]$ определим функции $f_1^k, f_2^k, \ldots, f_k^k$ следующим образом:

$$f_i^k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{i-1}{k} < x \leqslant \frac{i}{k}; \\ 0, & \text{при остальных значениях } x. \end{cases}$$

Последовательность $f_1^1,\ f_1^2, f_2^2,\ f_1^3, f_2^3, f_3^3,\ f_1^4, \ldots \xrightarrow{\mu} 0$, но не сходится ни в одной иррациональной точке $(\mu(\{x : |f_i^k(x)| > \sigma)\} = \frac{1}{k})$.

16. **Почти обратная теорема (Теорема Рисса)**: из сходимости по мере следует сходимость подпоследовательности почти всюду.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon_n \searrow 0, \eta_n \searrow 0, \sum \eta_n < \infty$. Построим монотонную $n_k \in \mathbb{N}$:

$$\mu\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\} < \eta_k$$

(по очереди, сначала n_1, потом $n_2 > n_1$ etc). Это можно сделать в силу $\xrightarrow{\mu}$. Покажем, что $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$. Положим $R_i = \bigcup\limits_{k=i}^{\infty} \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\}$, $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} R_i$. Теперь $R_i \supset R_{i+1}$,

в силу непрерывности меры $\lim \mu(R_i) = \mu(Q)$, но $\mu(R_i) < \sum\limits_{k=i}^{\infty} \eta_k \to 0$ из-за $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty \Rightarrow$ $\mu(Q) = 0$. Осталось проверить, что $x_0 \in (X \setminus Q) \Rightarrow f_n(x_0) \to f(x_0)$.

Пусть $x_0 \notin Q \Rightarrow \exists i_0 : x_0 \notin R_{i_0} \Rightarrow \forall k \geqslant i_0$ справедливо $x_0 \notin \{x : |f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_k\} \Rightarrow$ $|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k$. □

17. **Измеримость предела по мере.** Функция, являющаяся пределом по мере, стала поточечным пределом, про него известно, что он измерим. В доказательстве не использовалась измеримость предельной функции, а только измеримость множеств $\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\}$. Их измеримость явно предполагается.

    Можно сделать “честную” конструкцию. Ввести определение фундаментальности по мере:
    $\forall \sigma, \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \forall n, m > N$ справедливо $\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \sigma\}) < \varepsilon$.
    Фундаментальность сходящейся по мере последовательности очевидна.
    Теорему Рисса можно изменить так. Пусть f_n фундаментальна по мере. Тогда у нее есть подпоследовательность, сходящаяся почти всюду, к её пределу (который измерим!) последовательность сходится по мере.

18. Начинаются теоремы, специфичные для отрезка. Все предыдущие теоремы про поточечную сходимость, про сходимость по мере были для скалярнозначных функций, определенных на некотором множестве с мерой.

    Теорема Бореля. *Пусть* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{L}$. *Тогда* $\forall \delta, \varepsilon > 0 \; \exists g \in C[0,1] : \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta\}) < \varepsilon$. *Если* f *ограничена, то можно выбрать* $g :$ $\sup|g| \leqslant \sup|f|$.

    Иными словами, для любой измеримой функции на отрезке существует непрерывная функция, отличающаяся от измеримой не на сколь угодно мало на множестве сколь угодно малой меры.

    1) $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \in \mathfrak{L}$. Всегда $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; g \in \mathfrak{L}$, $|g| \leqslant c :$ справедливо $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$. Для доказательства рассмотрим срезку $f_n(x) = f(x)$, $|f(x| \leqslant n$, $f_n(x) = n$, $|f(x| > n$. Так как $\mu(\{x : |f(x)| > n\}) \to 0$, то в качестве g можно взять одну из срезок f_n с достаточно большим n.

    2) Пусть $M_k \subset [0,1], M_k = \overline{M}_k$, $k = 1, \ldots, n$ — дизъюнктный набор замкнутых множеств. Пусть $f : \coprod_{k=1}^n M_k \to \mathbb{R}$, $\forall k$ справедливо $f(x) = c_k$, $x \in M_k$. Тогда $f \in C\left(\coprod_{k=1}^n M_k\right)$.

    3) $M = \overline{M} \subset [0,1]$, $f \in C(M)$. Тогда $\exists g \in C[0,1] : x \in M \Rightarrow f(x) = g(x)$, $\sup_M |f| = \sup_{[0,1]} |g|$. Достаточно положить на интервалах, составляющих открытое множество $[0,1] \backslash M$, в качестве g линейную функцию.

    4) Пусть f ограничена (иначе рассмотрим срезку f). Зафиксируем δ, ε. Разобьем промежуток $[\inf f, \sup f]$ на N маленьких промежуточков $\Delta_n = [y_n, y_{n+1})$, $|y_{n+1} - y_n| < \delta$. Рассмотрим измеримые множества $K_n = \{x : f(x) \in \Delta_n\}$. Множества измеримы и дизъюнктны. Выберем внутри каждого по замкнутому подмножеству M_n близкой меры $\mu(K_n \setminus M_n) < \varepsilon / N$ и там положим $f(x) = y_n$. Потом достроим её до непрерывной везде по предыдущим леммам. $\square$

19. **Теорема Фреше.** *Для любой измеримой функции существует последовательность непрерывных функций, сходящихся к ней почти всюду.*

Для любой измеримой функции существует последовательность непрерывных функций, сходящихся к ней по мере.

Выберем $\varepsilon_n \searrow 0, \delta_n \searrow 0$, по теореме Бореля построим f_n, это искомая последовательность.

Теперь выберем по теореме Рисса подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. $\square$

20. **Теорема Лузина (1913):** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *измерима* $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi(x) \in C[a,b]$: *справедливо* $\mu(\{x : f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon$.

    Доказательство. Возьмем по теореме Фреше последовательность $f_n \overset{a.e.}{\to} f$, потом по теореме Егорова выберем множество G близкой меры, на котором $f_n \rightrightarrows f$, потом выберем замкнутое $D \subset G$ близкой к $\mu(G)$ меры, на нем сходится равномерно, значит сходится к непрерывной, потом продолжим до всего промежутка. $\square$

21. **Почти обратная теорема.** *Если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi(x) \in C[a,b]$: *справедливо* $\mu^*(\{x : f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon$, *то* f *измерима.*

    Доказательство. Выберем $\varepsilon_n \searrow 0$, построим по условию φ_n. По условию, φ_n непрерывны и фундаментальны по мере, так как из $\mu^*(\{x : f(x) \neq \varphi_n(x)\}) < \varepsilon_n,\ \mu^*(\{x : f(x) \neq \varphi_m(x)\}) < \varepsilon_m$ следует $\mu(\{x : \varphi_m(x) \neq \varphi_n(x)\}) < \varepsilon_n + \varepsilon_m$ и, тем более, $\mu(\{x : |\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| > \sigma\}) < \varepsilon_n + \varepsilon_m$ при любом $\sigma > 0$.

    Поэтому по теореме Рисса (переформулированной для фундаментальных по мере последовательностей) можно выбрать подпоследовательность, которая сходится почти всюду. Ясно, что предел совпадает с f. $\square$

22. На прошлой лекции было дано основное определение измеримой функции: измеримость множеств $\{x : f(x) < c\}$ при всех c.

    Была показано, что всякую измеримую функцию можно приблизить равномерно измеримой простой (не более счетного числа значений, все соответствующие множества измеримы). Таким образом, можно дать и такое эквивалентное определение измеримой функции: измеримая функция это та, которую можно приблизить (равномерно или поточечно или почти всюду) последовательностью простых функций.

    Если дать такое определение, то очень удобно доказывать громоздкую теорему об измеримости суммы двух функций и некоторые другие. Далее, именно с помощью такого определения будем вводить интеграл Лебега.

    Теперь можно ещё по-другому. Пусть простые функции будут как на 1м курсе, с отрезочками, конечное число ступенек. Можно и ими приблизить измеримую функцию, но только почти всюду (функция Дирихле).

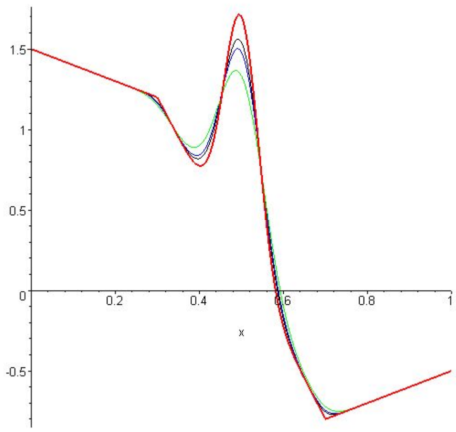
    В одну сторону это следует из теоремы Фреше (см. док-во теоремы Лузина) и из того, что каждую непрерывную можно равномерно приблизить ступенчатой (1й курс). Каждую из непрерывных функций $f_n \overset{a.e.}{\to} f$, равномерно приблизим ступенчатой φ_n с точностью $\varepsilon_n \searrow 0$.

В другую — из ранее доказанных теорем (ступенчатые функции измеримы, предел почти всюду последовательности измеримых функций — измерим).

23. Теперь сформулируем без доказательства теорему о многочленах Бернштейна:

$$f \in C[0,1],\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Теорема Бернштейна. $B_n \rightrightarrows f$ на $[0,1]$.



$$f(x) = -2|x-.3| + 3|x-.7| + 1.5e^{-300(x-.5)^2}$$

Красный цвет — это график f, остальные графики — многочлены Бернштейна при $n = 200, 400, 600$.

Для картинки выбрана функция с парой изломов и резким колебанием.

Очевидный аналог для любого $[a,b]$.

Конкретный вид многочленов Бершнтейна роли может быть и не играет... Важен сам факт, что какими-то многочленами можно равномерно на любом конечном отрезке приближать любые непрерывные функции. То, что функции очень гладкие (аналитические) можно приближать частичными суммами ряда Тейлора, не представляется странным, видим, что любые непрерывные можно.

Теорема Вейерштрасса 1. $f \in C,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists$ многочлен $P(x) : |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

Эту теорему потом докажем по-другому. Теоремы Бореля и Фреше можно переписать.

Теорема Фреше$'$. Для любой измеримой функции существует последовательность многочленов, сходящихся к ней почти всюду.

Теорема Бореля$'$. $f \in \mathfrak{L},\ \forall \delta, \varepsilon > 0\ \exists$ многочлен $P(x) : \mu(\{x : |f(x) - P(x)| \geqslant \delta\}) < \varepsilon$.

Теорема Вейерштрасса 2. $f \in C,\ \ f(0) = f(2\pi)$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ тригонометрический многочлен $T(x) : |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

Следует из теоремы Вейерштрасса 1 и $|f(\arccos y) - P(y)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - T(x)| < \varepsilon$.

Эти теоремы не доказаны так как мы опустили доказательство теоремы Берштейна. Теоремы Вейерштрасса потом в будущем получатся в качестве следствия из теорем о рядах Фурье и ядрах Фейера.