Бесконечномерные алгебры Ли и вертекс-операторные алгебры

Задачи 3

1. Рассмотрим вектор $|0\rangle$ и соответствующий ковектор $\langle 0|$ для ВОА Гейзенберга и Вирасоро. Вычислите $\langle 0|h(z)h(w)|0\rangle$ и $\langle 0|T(z)T(w)|0\rangle$.

2. Вычислите $\langle 0|h(z_1)\dots h(z_k)|0\rangle$ (начните с $k=3$).

3. Докажите, что два поля $A(z)$ и $B(w)$ локальны тогда и только тогда, когда для любых $v \in V$ и $\varphi \in V^*$ матричные элементы

$$\langle \varphi, A(z)B(w)v\rangle \text{ и } \langle \varphi, B(w)A(z)v\rangle$$

являются разложением одного и того же элемента

$$f_{v,\varphi} \in \mathbb{C}[[z,w]][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$$

в $\mathbb{C}((z))((w))$ и $\mathbb{C}((w))((z))$ соответственно, и порядки полюсов $f_{v,\varphi}$ по $(z-w)$ ограничены некоторым N для всех v, φ.

4. Докажите, что нормально упорядоченное произведение полей вида $\partial_z^i h(z)$ коммутативно и ассоциативно.

5. Рассмотрим поле $\frac{1}{2} : h(z)^2 : +\lambda\partial_z h(z)$, действующее на модуле Фока π. Докажите, что компоненты этого поля образуют алгебру Вирасоро. Вычислите соответствующий центральный заряд.

Infinite dimensional Lie algebras and vertex operator algebras

Problems 3

1. Consider a VOA V. Let $|0\rangle$ be the vacuum vector and let $\langle 0|$ be the corresponding covector. Compute $\langle 0|h(z)h(w)|0\rangle$ and $\langle 0|T(z)T(w)|0\rangle$.

2. Compute $\langle 0|h(z_1)\dots h(z_k)|0\rangle$ (start with $k=3$).

3. Prove that two fields $A(z)$ and $B(w)$ are local with respect to each other if for every $v\in V$ and $\varphi\in V^*$, the matrix elements

$$\langle\varphi, A(z)B(w)v\rangle \text{ и } \langle\varphi, B(w)A(z)v\rangle$$

are expansions of one and the same element

$$f_{v,\varphi}\in\mathbb{C}[[z,w]][z^{-1},w^{-1},(z-w)^{-1}]$$

in $\mathbb{C}((z))((w))$ and $\mathbb{C}((w))((z))$, respectively, and the order of pole of $f_{v,\varphi}$ in $(z-w)$ is uniformly bounded for all v,φ.

4. Prove that the normal ordering of the fields $\partial_z^i h(z)$ is commutative and associative.

5. Consider the field $\frac{1}{2} : h(z)^2 : +\lambda\partial_z h(z)$, acting on the Fock module π. Prove that the components of this field form the Virasoro algebra and compute the central charge.