

Контрольная № 4
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

Вариант 1

Задача 1. Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$ точек $A = (1 : 3)$, $B = (5 : -2)$, $C = (1 : -1)$ и $D = (2 : 3)$.

Задача 2. Проективное преобразование переводит три различные точки A , B и C в A , C и B соответственно. Как построить с помощью линейки вторую неподвижную точку этого преобразования?

Задача 3. Найти полярю точки $(6, 4)$ относительно квадрики

$$2x^2 + 3y^2 + 6x - 2y = 0.$$

Задача 4. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на касательные к ней.

Задача 5. Проективизировать гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

найти её касательные в точках пересечения с абсолютном и точку их пересечения.

Контрольная № 4
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

Вариант 2

Задача 1. Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$ точек $A = 1$, $B = 2$, $C = \infty$ и $D = \infty$.

Задача 2. Пусть A , B и C три различные точки проективной прямой. Доказать, что преобразование, переводящее эти точки в B , C и A соответственно, является эллиптическим (то есть не имеет неподвижных точек).

Задача 3. Найти полюс прямой $3x - y + 6 = 0$ относительно квадррики

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0.$$

Задача 4. Найти геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых касаются данной гиперболы с полуосями a и b . *Обратите внимание на то, что случаи $a > b$ и $a \leq b$ различны.*

Задача 5. Проективизировать параболу $y = x^2$, найти аффинные части её проективизации во всех трёх стандартных аффинных картах U_1 , U_2 и U_3 и определить тип полученных аффинных кривых.

Контрольная № 4
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

Вариант 3

Задача 1. На проективной прямой даны три точки

$$A = (1 : 2), \quad B = (-1 : 1), \quad C = (3 : 5).$$

Известно, что $(ABCD) = \frac{1}{2}$. Найти однородные проективные координаты точки D .

Задача 2. Найти все проективные преобразования прямой, квадрат которых равен тождественному преобразованию. Найти тип этих преобразований: являются ли они эллиптическими, параболическими или гиперболическими?

Задача 3. Найти полярю точки $(2, 1)$ относительно квадрики

$$4x^2 + 3xy - y^2 = 0.$$

Задача 4. Найти геометрическое место точек пересечения взаимно перпендикулярных касательных к данному эллипсу со сторонами a и b .

Задача 5. Найти проективное преобразование проективной плоскости, переводящее окружность $x^2 + y^2 = 1$ в гиперболу $x^2 - y^2 = 1$.

Контрольная № 4
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

Вариант 4

Задача 1. Ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырёх точек A, B, C и D равно λ . Чему равно ангармоническое отношение $(BADC)$?

Задача 2. Найти неподвижные точки проективного преобразования прямой

$$\tilde{x}^1 = x^1 + 2x^2, \quad \tilde{x}^2 = 4x^1 + 3x^2.$$

Задача 3. Найти полюс прямой $x - 3 = 0$ относительно квадрики

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0.$$

Задача 4. Доказать, что при любом значении k прямая $y = kx + \frac{1}{k}$ касается одной и той же параболы. Найти уравнение данной параболы.

Задача 5. Найти проективное преобразование проективной плоскости, переводящее гиперболу $x^2 - y^2 = 1$ в параболу $y = x^2$.

Контрольная № 4
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

Вариант 5

Задача 1. Введём на проективной прямой новые однородные проективные координаты, принимая точки с неоднородными координатами -4 , 2 и 3 за E_1 , E_2 и E . Найти связь между старой аффинной координатой x точки M и её новыми однородными проективными координатами $(x^1 : x^2)$.

Задача 2. Найти общий вид проективного преобразования прямой, оставляющего точки E_1 и E_2 неподвижными.

Задача 3. Найти полярную точку $(7, 5)$ относительно квадрики

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0.$$

Задача 4. Доказать, что произведение расстояний от фокусов гиперболы до любой касательной к ней равно квадрату мнимой полуоси.

Задача 5. Найти проективное преобразование проективной плоскости, переводящее пару пересекающихся прямых $x^2 - y^2 = 0$ в пару параллельных прямых $x^2 - 1 = 0$.

Контрольная № 4
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014

Вариант 6

Задача 1. Найти неоднородную (аффинную) координату точки M , если известно, что $(E_1E_2EM) = a$.

Задача 2. Найти проективное преобразование прямой, переводящее точки $0, 1$ и 2 в точки $0, 2$ и 1 соответственно.

Задача 3. Найти полюс прямой $x + 3y + 1 = 0$ относительно квадрики

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0.$$

Задача 4. Даны фокусы гиперболы $F_1 = (4, 2)$ и $F_2 = (-1, -10)$, а также уравнение касательной $3x + 4y - 5 = 0$. Найти полуоси гиперболы.

Задача 5. Найти хотя бы одно проективное преобразование, переводящее гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

в себя, а касательные в вершинах гиперболы в её асимптоты.