

Задачи для семинара № 8
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014

Проективная прямая и проективная плоскость

Задача 1. Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырёх точек A , B , C и D

- а) с неоднородными координатами $1, 2, -3, \infty$ соответственно;
- б) с однородными координатами $(3 : 1), (2 : 5), (1 : 0), (-2 : 1)$ соответственно.

но.

Задача 2. Три точки прямой с аффинными координатами $-2, 3$ и -1 приняты за точки E_1, E_2 и E новой проективной системы координат. Найти новые однородные координаты точки со старой аффинной координатой 5 .

Задача 3. Найти проективное преобразование прямой, переводящей точки $0, 1$ и 2 в точки $0, 1$ и ∞ соответственно.

Задача 4. В плоскости с аффинной системой координат Oxy введена новая проективная система координат $E_1E_2E_3E$ так, что в системе Oxy прямые E_2E_3, E_3E_1 и E_1E_2 задаются уравнениями $x - 4 = 0, y - 3 = 0$ и $3x + 4y - 12 = 0$ соответственно, а точка E имеет координаты $(3, 2)$. Найти

- а) новые проективные координаты точки M , старые аффинные координаты которой $(1, 1)$,
- б) старые аффинные координаты точки N , новые однородные проективные координаты которой $(4 : 3 : -6)$.

Задача 5. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $(1 : 2 : -1)$ и $(3 : 5 : -2)$.

Задача 6. Найти точку пересечения прямых AB и CD , если $A = (1 : 2 : 3), B = (-1 : 2 : 2), C = (3 : 1 : 5)$ и $D = (2 : 0 : 1)$. Надо ли для этого находить уравнения прямых AB и CD ?

Задача 7. Доказать теорему Дезарга: если два треугольника расположены на плоскости таким образом, что прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, проходят через одну точку, то три точки, в которых пересекаются продолжения трёх пар соответственных сторон треугольников, лежат на одной прямой.

Задача 8. Сформулировать утверждение, двойственное к теореме Дезарга (часто оба эти утверждения формулируют вместе как теорему Дезарга).

Задача 9. Доказать, что точки $A = (1 : 1 : 2), B = (3 : -1 : 2), C = (11 : -1 : 10)$ и $D = (3 : 7 : 10)$ проективной плоскости лежат на одной прямой. Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$.

Задача 10. В треугольнике PQR проведена медиана PM . Рассматривая пучок прямых, проходящих через точку P как проективную прямую, найти в нём четвёртую гармоническую прямую к прямым PQ, PR и PM .

Задача 11. Является ли проективное преобразование прямой

$$\tilde{x}^1 = 3x^1 - 5x^2, \quad \tilde{x}^2 = x^1 + x^2$$

эллиптическим, гиперболическим или параболическим?