

Задачи для семинара № 12
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014

**Фокусы, проективная классификация квадрик,
рациональная параметризация квадрик**

Задача 1. Найти все фокусы (включая комплексные) гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Задача 2. Определить методом Лагранжа проективный тип квадрики

$$x^1x^2 + x^2x^3 + x^3x^1 = 0.$$

Задача 3. Найти проективное преобразование, переводящее пару пересекающихся прямых $x^2 - y^2 = 0$ в пару параллельных прямых $x^2 - 1 = 0$.

Задача 4. Найти рациональную параметризацию гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Задача 5. Найти уравнение квадрики, заданной параметрическими уравнениями

$$x(t) = \frac{t^2 - 1}{t + 2}, \quad y(t) = \frac{t^2 + t}{t + 2}.$$

Задача 6. Пусть квадрика имеет две рациональные параметризации $(x(t), y(t))$ и $(u(s), v(s))$, и $s(t)$ формула замены параметра, то есть

$$u(s(t)) = x(t), \quad v(s(t)) = y(t).$$

Доказать, что функция $s(t)$ дробно-линейная,

$$s(t) = \frac{at + b}{ct + d}.$$

Задача 7. Найти все такие пары целых чисел (x, y) , что

$$y^2 = x^3 + x^2.$$

Указание: рассмотрите рациональную параметризацию, построенную с помощью семейства прямых $y = tx$.

Задача 8. Найдите такую рациональную параметризацию окружности

$$x^2 + y^2 = 5,$$

что для всех рациональных значений параметра t числа $x(t)$ и $y(t)$ рациональны.

Задача 9. Докажите, что декартов лист $x^3 + y^3 + 3xy = 0$ имеет рациональную параметризацию

$$x(t) = \frac{-3t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{-3t^2}{1+t^3},$$

а также докажите следующее замечательное свойство: три различные точки, отвечающие значениям параметра t , равным a , b и c , лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $abc = -1$.

Задача 10. Найти общий вид тех проективных преобразований, при которых гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

переходит в ту же гиперболу, а касательные в вершинах переходят в её асимптоты.