

**Задачи для семинара № 12**  
**Геометрия-1**  
**Матфак ВШЭ, осень 2014**

**Фокусы, проективная классификация квадрик,  
рациональная параметризация квадрик**

**Задача 1.** Найти все фокусы (включая комплексные) гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**Задача 2.** Определить методом Лагранжа проективный тип квадрики

$$x^1x^2 + x^2x^3 + x^3x^1 = 0.$$

**Задача 3.** Найти проективное преобразование, переводящее пару пересекающихся прямых  $x^2 - y^2 = 0$  в пару параллельных прямых  $x^2 - 1 = 0$ .

**Задача 4.** Найти рациональную параметризацию гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**Задача 5.** Найти уравнение квадрики, заданной параметрическими уравнениями

$$x(t) = \frac{t^2 - 1}{t + 2}, \quad y(t) = \frac{t^2 + t}{t + 2}.$$

**Задача 6.** Пусть квадрика имеет две рациональные параметризации  $(x(t), y(t))$  и  $(u(s), v(s))$ , и  $s(t)$  формула замены параметра, то есть

$$u(s(t)) = x(t), \quad v(s(t)) = y(t).$$

Доказать, что функция  $s(t)$  дробно-линейная,

$$s(t) = \frac{at + b}{ct + d}.$$

**Задача 7.** Найти все такие пары целых чисел  $(x, y)$ , что

$$y^2 = x^3 + x^2.$$

*Указание: рассмотрите рациональную параметризацию, построенную с помощью семейства прямых  $y = tx$ .*

**Задача 8.** Найдите такую рациональную параметризацию окружности

$$x^2 + y^2 = 5,$$

что для всех рациональных значений параметра  $t$  числа  $x(t)$  и  $y(t)$  рациональны.

**Задача 9.** Докажите, что декартов лист  $x^3 + y^3 + 3xy = 0$  имеет рациональную параметризацию

$$x(t) = \frac{-3t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{-3t^2}{1+t^3},$$

а также докажите следующее замечательное свойство: три различные точки, отвечающие значениям параметра  $t$ , равным  $a$ ,  $b$  и  $c$ , лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $abc = -1$ .

**Задача 10.** Найти общий вид тех проективных преобразований, при которых гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

переходит в ту же гиперболу, а касательные в вершинах переходят в её асимптоты.