

Задачи для семинара № 9
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014

Квадрики, касательные, поляритет

Задача 1. Найти уравнения аффинных частей квадрики

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0,$$

лежащих в аффинных картах U_1 , U_2 и U_3 , и определить их аффинный тип.

Задача 2. Проективизировать параболу $y^2 - z = 0$ и найти точки её пересечения с абсолютном. Найти касательную к параболе в точке пересечения с абсолютном.

Задача 3. Составить уравнения касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1,$$

проведенных из точки $(12, -3)$.

Задача 4. Доказать теорему о взаимности поляритета: если точка B лежит на поляре точки A , то и точка A лежит на поляре точки B .

Задача 5. Доказать, что если три точки лежат на одной прямой, то три их поляры пересекаются в одной точке.

Задача 6. Как построить полярю к точке, лежащей внутри эллипса?

Задача 7. Найти полярю точки $(-4, 2)$ относительно квадрики

$$6x^2 - 5xy - 4y^2 + 3x + 2y - 1 = 0.$$

Задача 8. Доказать, что невырожденная аффинная квадрика является параболой тогда и только тогда, когда абсолют является касательной её проективизации.

Задача 9. Даны квадрики $x^2 - 2y = 0$ и $2xy = 1$. Найти точку, полярю которой относительно обеих этих кривых служила бы одна и та же прямая.

Задача 10. Эллипс, имеющий фокусы в точках $(-3, 0)$ и $(3, 0)$, касается прямой $x + y - 5 = 0$. Составить уравнение эллипса.

Задача 11. Доказать, что при любом значении θ прямая

$$\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} = 1$$

касается одного и того же эллипса. Найти его уравнение.

Задача 12. Доказать, что произведение расстояний от фокусов эллипса до любой его касательной равно квадрату малой полуоси.