Программа экзамена
математический анализ, 2 курс, 2 модуль, 2014–2015

1. Алгебры и σ-алгебры множеств, борелевские алгебры (определения, свойства, примеры).
2. Совокупность открытых лучей (a, ∞) порождает σ-алгебру борелевских множеств на прямой.
3. Теорема о прообразах σ-алгебры.
4. Аддитивные и σ-аддитивные меры (определения, примеры, простые свойства).
5. Цепочки множеств, непрерывность меры $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.
6. Из непрерывности меры следует её σ-аддитивность
7. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Sigma$, $\mu(A_i \bigcap A_j) = 0$ при $i \neq j$. Тогда $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.
8. Теорема о представлении меры в виде суммы безатомной и чисто атомарной меры.
9. Теорема о виде атомов меры в метрическом пространстве.
10. Мера на прямоугольниках и элементарных множествах, корректность определения, σ-аддитивность меры на элементарных множествах.
11. Внешняя мера, её σ-субаддитивность на 2^X.
12. Определение измеримости по Лебегу и меры Лебега, σ-аддитивность меры.
13. Множество измеримых подмножеств образует σ-алгебру.
14. Эквивалентность двух определений измеримости.
15. Открытые множества измеримы по Лебегу.
16. Пример неизмеримого множества.
17. Множество измеримо по Лебегу, если оно есть объединение множества G_δ и множества меры 0.
18. Полукольцо множеств, конструкция продолжения σ-аддитивной меры на порожденную σ-алгебру.
19. Измеримые функции, теорема об эквивалентность двух определений.

19а. Непрерывная функция — борелевская.

20. Пример неборелевского множества меры 0.

20а. Прообраз измеримого множества при непрерывном отображении может быть неизмерим.

21. Арифметические свойства измеримых функций, измеримость sup, min, измеримость сложной функция.
22. Поточечный предел последовательности измеримых функций — измеримая функция
23. Измеримость непрерывных функций, монотонных функций, функций, принимающих счетное множество значений.
24. Измеримая функция является равномерным пределом последовательности простых функций.
25. Сходимость почти всюду, предел почти всюду последовательности измеримых функций измерим.
26. Теорема Егорова.
27. Сходимость по мере. Теорема: сходимость по мере следует из сходимости почти всюду.
28. Теорема Рисса: из сходимости по мере следует существование подпоследовательности, сходящейся почти всюду.
29. Теорема Бореля. $\forall \delta, \varepsilon > 0\ \exists g \in C[0,1] : \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \delta\}) < \varepsilon$.
30. Теорема Фреше. Для любой измеримой функции существует последовательность непрерывных функций, сходящихся к ней почти всюду.
31. Теорема Лузина.
32. Формулировки теорем Бернштейна; Вейерштрасса; Бореля и Фреше (для многочленов).

Литература.

1. Кадец В.М. Курс функционального анализа, Харьков, 2006.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, 1976.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной, М., Наука, 1975.
4. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, М., Мир, 1979