**Задачи для семинара № 13**
**Геометрия-1**
**Матфак ВШЭ, осень 2014**

## Рациональная параметризация квадрик, ангармоническое отношение четырёх точек на квадрике

*Примечание: часть задач перенесена из предыдущего листка, так как их не успели разобрать на прошлой неделе.*

**Задача 1.** Найти рациональную параметризацию гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**Задача 2.** Найти уравнение квадрики, заданной параметрическими уравнениями

$$x(t) = \frac{t^2 - 1}{t + 2}, \quad y(t) = \frac{t^2 + t}{t + 2}.$$

**Задача 3.** Пусть различные точки $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат на квадрике. Выберем произвольную точку $E$ (отличную от $A$, $B$, $C$ и $D$) на квадрике и прямую $l$, не проходящую через $E$. Пусть $A'$, $B'$, $C'$ и $D'$ — проекции точек $A$, $B$, $C$ и $D$ из точки $E$ на прямую $l$. Докажите, что ангармоническое отношение $(A'B'C'D')$ не зависит от выбора $E$ и $l$. Это число называется ангармоническим отношением $(ABCD)$ точек $A$, $B$, $C$ и $D$, лежащих на квадрике.

**Задача 4.** Найти все такие пары целых чисел $(x, y)$, что

$$y^2 = x^3 + x^2.$$

*Указание: рассмотрите рациональную параметризацию, построенную с помощью семейства прямых $y = tx$.*

**Задача 5.** Найти образ произвольной точки параболы $y^2 = 4x$ при проективном преобразовании, которое переводит эту параболу в себя, а точки параболы $A = (1, 2)$, $B = (16, -8)$ $C = (1, -2)$ переводит в $A = (1, 2)$, $B = (1, -2)$ $C = (0, 0)$.

**Задача 6.** Найдите такую рациональную параметризацию окружности

$$x^2 + y^2 = 5,$$

что для всех рациональных значений параметра $t$ числа $x(t)$ и $y(t)$ рациональны.

**Задача 7.** Докажите, что декартов лист $x^3 + y^3 + 3xy = 0$ имеет рациональную параметризацию

$$x(t) = \frac{-3t}{1 + t^3}, \quad y(t) = \frac{-3t^2}{1 + t^3},$$

а также докажите следующее замечательное свойство: три различные точки, отвечающие значениям параметра $t$, равным $a$, $b$ и $c$, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $abc = -1$.

**Задача 8.** Найти общий вид тех проективных преобразований, при которых гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

переходит в ту же гиперболу, а касательные в вершинах переходят в её асимптоты.

**Задача 9*.** Докажите теорему Паскаля с помощью ангармонического отношения четырёх точек квадрики.