

Программа экзамена по курсу геометрии-1
Матфак ВШЭ, второй модуль 2014-2015 учебного года

1. Проективное пространство, аффинные карты, однородные и неоднородные координаты. Точки, прямые и k -мерные плоскости в проективном пространстве. Задание гиперплоскости проективного пространства однородным линейным уравнением. Абсолют. Двойственное проективное пространство, проективная двойственность. Проективные координаты, фундаментальные точки и единичная точка.
2. Группа проективных преобразований. Связь дробно-линейных преобразований прямой и проективных преобразований проективной прямой. Эрлангенская программа Клейна на примере евклидовой, аффинной и проективной геометрий, а также геометрии подобия. Ангармоническое отношение четырех точек, лежащих на одной прямой, как инвариант группы проективных преобразований. Формулировки теорем Дезарга, Паппа и Фано.
3. Аффинные преобразования как проективные преобразования, сохраняющие абсолют. Однородные многочлены и алгебраические гиперповерхности в проективных пространствах. Аффинная часть проективной гиперповерхности и проективизация аффинной гиперповерхности. Квадратичные формы, поляризация квадратичной формы. Квадрики, преобразование уравнения квадрики при замене координат. Квадрики в проективной плоскости.
4. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Касательная к плоской проективной квадрике. Касательная к плоской аффинной квадрике. Степень пересечения прямой и проективной алгебраической кривой. Касательные в особой точке вырожденной квадрики. Двойственная квадрика. Поляритет: полюс, поляр, связи с проективной двойственностью.
5. Распадающиеся кривые, разложение квадрики на множители. Единственность квадрики, проходящей через пять точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой. Единственность с точностью до пропорциональности уравнения квадрики, содержащей более одной точки.
6. Пучок квадрик, линейные свойства. Кубики, пучки кубик. Теорема Паскаля для коник, обратная теорема Паскаля.
7. Теорема Паскаля для вырожденных квадрик: теорема Паппа. Вырождения: касательная вместо стороны шестивершинника. Теорема Брианшона как двойственная к теореме Паскаля.
8. Асимптотические направления. Диаметр, сопряженный неасимптотическому направлению. Центр как точка пересечения диаметров и как полюс абсолюта.
9. Центр симметрии квадрики и его связь с центром, определённым как полюс абсолюта. Сопряжённые направления и сопряжённые диаметры. Оси симметрии, главные оси. Собственные векторы и собственные числа матрицы, характеристический многочлен. Приведение квадрики к каноническому виду.

10. Круговые точки $I = (1 : i : 0)$ и $J = (1 : -i : 0)$, изотропные прямые, фокусы как точки пересечения изотропных касательных. Проективная классификация квадрик.
11. Рациональная параметризация квадрик. Применение к решению диофантовых уравнений на примере пифагоровых троек.