1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

3 Континуальный интеграл

4 Гауссовы интегралы и корреляционные функции

5 Двумерные теории бозонов и фермионов

6 Переход к операторному формализму

7 Теория скалярного поля и алгебра Вирасоро

8 Тензор энергии-импульса и примарные операторы

9 Фермионы и системы первого порядка

9.1 Конформная bc-система

Рассмотрим теперь двумерную конформную свободную теорию грассмановых bc-полей спинов $(j,0)$ и $(1-j,0)$ для полей c и b соответственно с действием первого порядка

$$S = \frac{1}{\pi}\int_{\Sigma} d^2\sigma\ b\bar{\partial}c \tag{9.1}$$

и будем считать поля нормированными так, чтобы их корреляционная функция была

$$\langle b(z)c(z')\rangle = \frac{1}{z-z'} \tag{9.2}$$

являющейся следствием формулы Коши

$$\bar{\partial}\frac{1}{z-z'} = \pi\delta^{(2)}(z-z') \tag{9.3}$$

Как и в случае свободного скалярного поля введем нормальное произведение

$$: b(z)c(z') := b(z)c(z') - \langle b(z)c(z')\rangle = b(z)c(z') - \frac{1}{z-z'} \tag{9.4}$$

которое уже несингулярно при $z \to z'$.

Тензор энергии-импульса можно строить разными способами. Мы воспользуемся тем, что голоморфная компонента тензора энергии-импульса $\bar\partial T_{bc} = 0$ веса 2 может содержать только два слагаемых

$$T = T_{bc} = \alpha : b\partial c : + \beta : c\partial b : \tag{9.5}$$

коэффициенты при которых можно зафиксировать воспроизводя операторные разложения

$$\begin{aligned} T(z)c(w) &= \frac{j}{(z-w)^2} c(w) + \frac{1}{z-w}\partial c(w) + \ldots \\ T(z)b(w) &= \frac{1-j}{(z-w)^2} b(w) + \frac{1}{z-w}\partial b(w) + \ldots \end{aligned} \tag{9.6}$$

говорящие о том, что духовые поля c и b являются примарными полями с весами j и $(1-j)$ соответственно. Вычислим, например, первое операторное разложение

$$\begin{aligned} T(z)c(w) &= \alpha : b(z)\partial c(z) : c(w) + \beta : c(z)\partial b(z) : c(w) = \\ &= -\alpha \frac{1}{z-w}\partial c(z) - \beta \frac{1}{(z-w)^2} c(z) + \ldots = \\ &= -\beta \frac{1}{(z-w)^2} c(w) - \frac{\alpha+\beta}{z-w}\partial c(w) + \ldots \end{aligned} \tag{9.7}$$

откуда следует $\beta = -j$, $\alpha + \beta = -1$ или

$$T = (j-1) : b\partial c : - j : c\partial b : \tag{9.8}$$

Нетрудно убедиться, что второе из соотношений (9.6) при этом удовлетворяется автоматически.

Что касается центрального заряда, то его опять следует искать как самый сингулярный член в операторном разложении

$$\begin{aligned} T(z)T(w) = (j-1)^2 : b(z)\partial c(z) :: b(w)\partial c(w) : + j^2 : c(z)\partial b(z) :: c(w)\partial b(w) : - \\ - j(j-1) : b(z)\partial c(z) :: c(w)\partial b(w) : - j(j-1) : c(z)\partial b(z) :: b(w)\partial c(w) : \end{aligned} \tag{9.9}$$

Самый сингулярный член сводится к произведению попарных корреляционных функций. С учетом антикоммутативности полей получаем

$$\begin{aligned} T(z)T(w) = -(j-1)^2 \langle b(z)\partial c(w)\rangle\langle b(w)\partial c(z)\rangle - j^2 : \langle\partial b(z)c(w)\rangle\langle\partial b(w)c(z)\rangle - \\ - j(j-1)\langle b(z)c(w)\rangle\langle\partial b(w)\partial c(z)\rangle - j(j-1)\langle b(w)c(z)\rangle\langle\partial b(z)\partial c(w)\rangle + \ldots = \\ = -(j-1)^2 \frac{1}{(z-w)^2}\frac{1}{(w-z)^2} - j^2 \frac{-1}{(z-w)^2}\frac{-1}{(w-z)^2} - \\ - j(j-1)\frac{1}{z-w}\frac{-2}{(w-z)^3} - j(j-1)\frac{1}{w-z}\frac{-2}{(z-w)^3} + \ldots = \\ = -\frac{1}{(z-w)^4}\left((j-1)^2 + j^2 + 4j(j-1)\right) + \ldots = -\frac{1}{(z-w)^4}\left(6j^2 - 6j + 1\right) + \ldots \end{aligned} \tag{9.10}$$

откуда следует, что центральный заряд грассмановой bc-системы

$$c_{bc} = -2\left(6j^2 - 6j + 1\right) \tag{9.11}$$

Эта ровно та формула, которая необходима для вычисления конформной аномалии в теории бозонных струн и суперструн, наряду с уже вычисленным центральным зарядом скалярного поля $c = 1$. Её важные частные случаи

- $j = -1$, $1 - j = 2$, $c = -26$ что дает критическую размерность бозонной струны как результат вычисления конформной аномалии в bc-системе, отвечающей духам репараметризаций, или глобально определенных векторных полей;
- $j = 1 - j = \frac{1}{2}$, $c = 1$: двумерный комплексный фермион Дирака-Вейля, для которого представление алгебры Вирасоро имеет то же значение центрального заряда, что и для (голоморфной части) теории свободных бозонов. Эквивалентны ли эти представления?

9.2 Теория двумерных фермионов в операторном формализме

Действие Вейля для двумерных безмассовых комплексных фермионов является частным случаем грассмановой bc-системы с $j = 1 - j = \frac{1}{2}$, т.е.

$$S = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z\ \tilde{\psi}\bar{\partial}\psi \quad \left(\ +c.c.\right) \tag{9.12}$$

где $\tilde{\psi}$ и ψ - 1/2-дифференциалы на мировом листе, голоморфные на уравнениях движения [1]

$$\bar{\partial}\psi = 0, \qquad \bar{\partial}\tilde{\psi} = 0 \tag{9.13}$$

и для которых рассуждение с гауссовым интегралом приводит к операторному разложению

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(z)\psi(z') &= \frac{1}{z - z'} + :\tilde{\psi}(z)\psi(z'):= \\ &= \frac{1}{z - z'} + J(z) + (z - z'):\partial\tilde{\psi}\psi(z'): + \ldots \end{aligned} \tag{9.14}$$

В формуле (9.14) мы ввели нормальное упорядочение по фермионному вакууму (пока еще не определенному, но удовлетворяющему $\langle 0| : (...) : |0\rangle = 0$) и фермионный голоморфный

[1] Для "анти-голоморфной части" действия все утверждения получаются формальным комплексным сопряжением.

$U(1)$-ток [2]

$$
\begin{aligned}
& J(z) =: \tilde{\psi}(z)\psi(z) : \\
& J(z)\psi(z') = -\underbrace{\tilde{\psi}(z)\psi(z')}\psi(z) + \ldots = -\frac{\psi(z')}{z-z'} + \ldots \\
& J(z)\tilde{\psi}(z') = \tilde{\psi}(z)\underbrace{\psi(z)\tilde{\psi}(z')} + \ldots = \frac{\tilde{\psi}(z')}{z-z'} + \ldots
\end{aligned}
\tag{9.15}
$$

А как следует из (9.8) - тензор энергии-импульса

$$
T = -\tfrac{1}{2}\left(: \tilde{\psi}\partial\psi : - : \partial\tilde{\psi}\psi : \right) \tag{9.16}
$$

Этот тензор энергии-импульса по-прежнему может быть получен конструкцией Сугавары

$$
J(z)J(z') = \frac{1}{(z-z')^2} + 2T(z') + O(z-z') \tag{9.17}
$$

и поэтому генерирует алгебру Вирасоро с центральным зарядом $c=1$.

Действительно, пользуясь теоремой Вика для фермионов, легко написать

$$
\begin{aligned}
& : \tilde{\psi}(z)\psi(z) :: \tilde{\psi}(z')\psi(z') := \underbrace{\tilde{\psi}(z)\underbrace{\psi(z)\tilde{\psi}(z')}\psi(z')} + \\
& + : \tilde{\psi}(z)\underbrace{\psi(z)\tilde{\psi}(z')}\psi(z') : + \underbrace{: \tilde{\psi}(z) : \psi(z)\tilde{\psi}(z') : \psi(z') :} + : \tilde{\psi}(z)\psi(z)\tilde{\psi}(z')\psi(z') := \\
& = \frac{1}{(z-z')^2} + \frac{1}{z-z'}\left(: \tilde{\psi}(z)\psi(z') : + : \psi(z)\tilde{\psi}(z') : \right) + \ldots = \\
& = \frac{1}{(z-z')^2} + : \partial\tilde{\psi}\psi(z') : + : \partial\psi\tilde{\psi}(z') : + \ldots
\end{aligned}
\tag{9.18}
$$

9.3 Фермионные моды

На уравнениях движения естественно написать

$$
\psi(z) = \sum_r \frac{\psi_r}{z^{r+1/2}}, \qquad \tilde{\psi}(z) = \sum_s \frac{\tilde{\psi}_s}{z^{s+1/2}} \tag{9.19}
$$

[2]Квадратичный по полям нормально упорядоченный оператор $J_{\rm bc}(z) =: b(z)c(z) :$ тока или духового числа можно ввести и для bc-системы любого спина, но при $j \neq \frac{1}{2}$ этот ток является аномальным. Аномалия проявляется в появлении старшего полюса (третьего порядка) в операторном разложении с тензором энергии-импульса и/или в том, что квантовое среднее $\langle\bar{\partial}J_{\rm bc}\rangle$ вообще-говоря не равно нулю, а пропорционально кривизне поверхности $R^{(2)}_{z\bar{z}}$. Коэффициенты при старшем полюсе и в уравнении аномалии содержат фактор $(1-2j)$.

тогда вычисление *антикоммутатора* даст

$$\begin{gathered}\left[\tilde{\psi}_r, \psi_s\right]_+ = \oint_{C'_0} \frac{dz'}{2\pi i} z'^{s-1/2} \oint_{C_{z'}} \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1/2} \tilde{\psi}(z)\psi(z') = \\ = \oint_{C'_0} \frac{dz'}{2\pi i} z'^{s-1/2} \oint_{C_{z'}} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{r-1/2}}{z-z'} = \oint_{C'_0} \frac{dz'}{2\pi i} z'^{s+r-1} = \delta_{s+r,0}\end{gathered} \tag{9.20}$$

Если моды фермионов нумеруются целочисленными индексами $r, s \in \mathbb{Z}$, то

- поля в (9.19) неоднозначны при обходе вокруг нуля;
- есть нулевая мода $[\tilde{\psi}_0, \psi_0]_+ = 1$ (минимальное представление этой алгебры двумерно, например матрицами $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ что существенно, например в теории фермионных струн.)

Однако если мы будем считать $r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, то неоднозначность и нулевая мода пропадают. При радиальном квантовании для вакуума в $z = 0$ для несингулярности действия операторов

$$\begin{gathered}\psi(z)|0\rangle = \left(\ldots + \frac{\psi_{3/2}}{z^2} + \frac{\psi_{1/2}}{z} + \psi_{-1/2} + \ldots\right)|0\rangle \\ \tilde{\psi}(z)|0\rangle = \left(\ldots + \frac{\tilde{\psi}_{3/2}}{z^2} + \frac{\tilde{\psi}_{1/2}}{z} + \tilde{\psi}_{-1/2} + \ldots\right)|0\rangle\end{gathered} \tag{9.21}$$

можно потребовать

$$\psi_r|0\rangle = \tilde{\psi}_r|0\rangle = 0, \qquad r > 0 \tag{9.22}$$

а отрицательные гармоники $\tilde{\psi}_{-r} = \psi_r^\dagger$, $\psi_{-r} = \tilde{\psi}_r^\dagger$, при $r > 0$ считать операторами рождения одночастичных состояний. Тогда, очевидно, что как моды тока

$$J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{J_n}{z^{n+1}}, \qquad J_n =: \sum_{r+s=n} \tilde{\psi}_r \psi_s : \tag{9.23}$$

и, в частности, оператор заряда (или числа частиц - при этом число античастиц надо вычитать!)

$$J_0 = \sum_{r>0} \left(\tilde{\psi}_{-r}\psi_r - \psi_{-r}\tilde{\psi}_r\right) = \sum_{r>0} \left(\psi_r^\dagger \psi_r - \tilde{\psi}_r^\dagger \tilde{\psi}_r\right) = \sum_{r>0} (n_r - \tilde{n}_r) \tag{9.24}$$

(где n_r $\tilde{n}_r$ операторы чисел заполнений для частиц и античастиц, принимающие для фермионов значения только $0, 1$ - принцип Паули!) так и генераторы алгебря Вирасоро

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}, \qquad L_n = \tfrac{1}{2} : \sum_{r+s=n} (r-s)\tilde{\psi}_s \psi_r : \tag{9.25}$$

в частности

$$\begin{aligned} L_0 =: \sum_r r\tilde{\psi}_{-r}\psi_r := \sum_{r>0} r\left(\tilde{\psi}_{-r}\psi_r + \psi_{-r}\tilde{\psi}_r\right) = \\ = \sum_{r>0} r\left(\psi_r^\dagger\psi_r + \tilde{\psi}_r^\dagger\tilde{\psi}_r\right) = \sum_{r>0} r\left(n_r + \tilde{n}_r\right) \end{aligned} \tag{9.26}$$

выражаются через билинейные комбинации фермионных мод.

Наконец, можно поставить естественный вопрос о вычислении матричных элементов и следов по Гильбертову пространству $\mathcal{H}$ состояний фермионной системы, которое натягивается на базис

$$|0\rangle \oplus_{r>0} \psi_{-r}|0\rangle \oplus_{r>0} \tilde{\psi}_{-r}|0\rangle \tag{9.27}$$

двойственным для которого является

$$\langle 0| \oplus_{r>0} \langle 0|\tilde{\psi}_r \oplus_{r>0} \langle 0|\psi_r \tag{9.28}$$

как следствие очевидного спаривания $\langle 0|0\rangle = 1$, $\langle 0|\tilde{\psi}_r\psi_{-s}|0\rangle = \langle 0|\psi_r\tilde{\psi}_{-s}|0\rangle = \delta_{r,s}$. Поскольку

$$L_0|0\rangle = 0, \qquad L_0\ \psi_{-r}|0\rangle = r\ \psi_{-r}|0\rangle, \quad L_0\ \tilde{\psi}_{-r}|0\rangle = r\ \tilde{\psi}_{-r}|0\rangle \tag{9.29}$$

то очевидно, что для следа по полному пространству состояний получаем

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} q^{L_0} = \prod_{r>0}\left(1+q^r\right)^2 = \prod_{n\geq 0}\left(1+q^{n+1/2}\right)^2 = q^{1/24}\frac{\theta_3(q)}{\eta(q)} \tag{9.30}$$

где мы ввели обозначения

$$\eta(q) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), \qquad \theta_3(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2/2} \tag{9.31}$$

для функции Дедекинда и тэта-константы.

9.4 Вещественные фермионы

Полезно также иногда переписать действие (9.12) введя "вещественные фермионы"

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1(z) + i\Psi_2(z)\right) \\ \psi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1(z) - i\Psi_2(z)\right) \\ S &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\mu=1,2}\int_\Sigma d^2z\ \Psi_\mu\bar{\partial}\Psi_\mu \end{aligned} \tag{9.32}$$

и ровно так же можно сделать в анти-голоморфном секторе. Эти вещественные фермионы являются прямым аналогом возникающих в действии для фермионной частицы, и с их помощью можно написать действие фермионной струны.

Голоморфные на уравнениях движения $\partial\Psi = 0$ вещественные фермионы представляют собой конформную теорию с операторным разложением

$$\Psi(z)\Psi(z') = \frac{1}{z-z'} + O(z-z') \tag{9.33}$$

в которой нет тока единичной размерности и спина, а тензор энергии-импульса

$$\begin{gathered} T(z) = -\tfrac{1}{2} : \Psi\partial\Psi(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}} \\ L_n = \tfrac{1}{2} : \sum_{r+s=n} r\Psi_s\Psi_r :, \qquad L_0 = \sum_{r>0} r\Psi_{-r}\Psi_r \end{gathered} \tag{9.34}$$

или его компоненты, выраженные через гармоники

$$\Psi(z) = \sum_r \frac{\Psi_r}{z^{r+1/2}}, \qquad [\Psi_r, \Psi_s]_+ = \delta_{s+r,0}, \qquad \Psi_r|0\rangle = 0, \quad r>0 \tag{9.35}$$

что приводит к “половинной статсумме” вещественного фермиона

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mu} q^{L_0} = \prod_{r>0}(1+q^r) = \prod_{n\geq 0}\left(1+q^{n+1/2}\right) \tag{9.36}$$

так как гильбертово пространство $\mathcal{H} = \otimes_{\mu=1,2}\mathcal{H}_\mu$.

9.5 Немного статфизики и обобщения на другие тэта-константы

Докажем теперь важное тождество (тройного произведения Якоби)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}k^2}t^k = \prod_{n>0}(1-q^n)\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}t\right)\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}t^{-1}\right) \tag{9.37}$$

представив его как производящую функцию для большого канонического ансамбля системы свободных фермионов с энергиями (9.26) или

$$e^{-E_r/T} = e^{-\frac{r}{T}} = q^r, \qquad r \in \mathbb{Z}+\tfrac{1}{2},\ r>0 \tag{9.38}$$

и химическим потенциалом $t = e^{\mu/T}$. Другими словами, состояния системы нумеруются полуцелыми числами, число частиц и античастиц в каждом состоянии $n_r = 0,1$ и $\tilde{n}_s =$

$0,1$ соответственно, а полное число частиц $J_0 = N = \sum_r (n_r - \tilde{n}_r)$. Таким образом, для статсуммы имеем

$$
\begin{aligned}
Z(q,t) &= \sum e^{-\frac{(E-\mu N)}{T}} = \mathrm{Tr}\left(q^{L_0} t^{J_0}\right) = \sum_{\{n_r\};\{\tilde{n}_r\}} q^{r(n_r+\tilde{n}_r)} t^{n_r - \tilde{n}_r} = \\
&= \prod_{r>0} \sum_{\{n_r\}} (q^r t)^{n_r} \prod_{r>0} \sum_{\{\tilde{n}_r\}} \left(q^r t^{-1}\right)^{\tilde{n}_r} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + q^{n-\frac{1}{2}} t\right) \left(1 + q^{n-\frac{1}{2}} t^{-1}\right)
\end{aligned}
\tag{9.39}
$$

С другой стороны совершенно очевидно, что та же статсумма большого канонического ансамбля может быть представлена в виде

$$
Z(q,t) = \sum e^{-\frac{(E-\mu N)}{T}} = \sum_{N \in \mathbb{Z}} t^N Z_N(q) \tag{9.40}
$$

ряда по химпотенциалу с коэффициентами - статсуммами при фиксированном фермионном числе $N = \sum_k (n_k - \tilde{n}_k)$.

Как вычислить эту статсумму? На самом деле мы практически вернулись к "гамильтониану" (9.26) в терминах "чисел заполнения"

$$
H = L_0 = \sum_{r>0} r \left(\tilde{\psi}_{-r}\psi_r + \psi_{-r}\tilde{\psi}_r\right) = \sum_{r>0} r \left(\psi_r^\dagger \psi_r + \tilde{\psi}_r^\dagger \tilde{\psi}_r\right) = \sum_{r>0} (r n_r + r\tilde{n}_r) \tag{9.41}
$$

когда энергии системы определяются занятыми уровнями с $n_r = 1$ и $\tilde{n}_s = 1$ при каких-то $r_1, \ldots, r_l$ и $s_1, \ldots, s_{\tilde{l}}$, так что

$$
E = \sum_{j=1}^{l} r_j + \sum_{k=1}^{\tilde{l}} s_k, \qquad N = l - \tilde{l} \tag{9.42}
$$

Пусть сначала $N = 0$, $l = \tilde{l}$, тогда

$$
E = \sum_{j=1}^{l} (r_j + s_j) = \sum_{i=1}^{l'} k_i = M \geq 0, \qquad N = 0 \tag{9.43}
$$

где M и $\{k_i\}$ - целые числа, а кроме того $\{k_i\}$ - произвольные разбиения M [3]. Это означает, что число таких состояний эквивалентно числу состояний

$$
|Y_{\mathbf{k}}\rangle = |k_1, \ldots, k_l\rangle = \alpha_{-k_1} \ldots \alpha_{-k_l} |0\rangle \tag{9.44}
$$

[3]Заметим, что число l' ненулевых $\{k_i\}$ вообще говоря отличается от числа l ненулевых чисел заполнения для фермионов, так как может оказаться равным числу строк в транспонированной диаграмме Юнга.

с энергией

$$L_0|Y_{\mathbf{k}}\rangle = \left(\sum_{j=1}^{l} k_j\right)|Y_{\mathbf{k}}\rangle \tag{9.45}$$

в теории свободных бозонов или свободного скалярного поля в двумерии, где статсумму мы уже вычисляли

$$Z_0(q) = \mathrm{Tr} q^{L_0} = \frac{1}{\prod_{n>0}(1-q^n)} \tag{9.46}$$

совпадает со статсуммой (точнее - ее голоморфной части) *свободных бозонов*! Если же $|N| = |l-\tilde{l}| > 0$, то ситуация меняется несильно - если скажем $l > \tilde{l}$, то оно представляет собой $\psi^\dagger_{N-1/2}\dots\psi^\dagger_{1/2}|0\rangle$ с энергией

$$E_N = \sum_{j=1}^{N}\left(j-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}N^2 \tag{9.47}$$

над которым растет та же башня из “бозонов”. Таким образом

$$Z_N(q) = q^{N^2/2}Z_0(q) = \frac{q^{N^2/2}}{\prod_{n>0}(1-q^n)} \tag{9.48}$$

причем результат естественно не зависит от знака $N = l - \tilde{l}$. Таким образом, для производящей функции большого канонического ансамбля получаем

$$\begin{aligned} Z(q,t) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}t\right)\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}t^{-1}\right) = \\ &= \sum_{N\in\mathbb{Z}} t^N Z_N(q) = \frac{\sum_{N\in\mathbb{Z}} t^N q^{N^2/2}}{\prod_{n>0}(1-q^n)} \end{aligned} \tag{9.49}$$

что эквивалентно формуле тройного произведения Якоби. Правую часть этого равенства легко переписать, вводя тэта-*функцию* Якоби

$$Z(q,t) = \frac{\sum_{N\in\mathbb{Z}} t^N q^{N^2/2}}{\prod_{n>0}(1-q^n)} = \frac{\Theta(t;q)}{\prod_{n>0}(1-q^n)} \tag{9.50}$$

в мультипликативных переменных, т.е. $t = e^{2\pi i z}$, $q = e^{2\pi i\tau}$.

Формула (9.49) имеет некоторые очевидные следствия. Например, можно ввести оператор фермионного числа F и фермионной четности $(-)^F$, такие, что

$$\begin{gathered} (-)^F|0\rangle = |0\rangle, \qquad (-)^F\ \psi_{-r}|0\rangle = -\psi_{-r}|0\rangle, \quad (-)^F\ \tilde{\psi}_{-r}|0\rangle = -\psi_{-r}|0\rangle, \quad \forall r \\ \left[(-)^F, \psi_r\right]_+ = 0, \qquad \left[(-)^F, \tilde{\psi}_r\right]_+ = 0, \qquad \forall r \end{gathered} \tag{9.51}$$

и т.д. [4] Тогда из (9.49) при $t = -1$ очевидно, что

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(-)^F q^{L_0} = \prod_{r>0}(1-q^r)^2 = \prod_{n\geq 0}\left(1-q^{n+1/2}\right)^2 = q^{1/24}\frac{\theta_4(q)}{\eta(q)} \tag{9.52}$$

где появляется другая тэта-константа

$$\theta_4(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-)^n q^{n^2/2} \tag{9.53}$$

Наконец, если мы вдруг допустим, что *целочисленные* фермионные гармоники тоже имеют смысл (забыв пока про проблему с квазипериодичностью или двузначностью и про нулевую моду), то формально заменив в (9.30) полуцелые индексы на целые, получим

$$\mathrm{Tr} q^{L_0} = \prod_{n>0}(1+q^n)^2 = \frac{q^{-1/12}\theta_2(q)}{2\eta(q)} \tag{9.54}$$

где уже

$$\theta_2(q) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} q^{r^2/2} \tag{9.55}$$

Наконец самый интересный и неожиданный результат должен был бы получиться с четвертой известной тэта-константой $\theta_1(q) = 0$. С некоторой натяжкой его можно заработать переопределив сначала (9.54) на конечную константу и переписав в виде

$$\mathrm{Tr} q^{L_0} = \prod_{n\geq 0}(1+q^n)^2 = \frac{2q^{-1/12}\theta_2(q)}{\eta(q)} \tag{9.56}$$

ну и тогда "почти очевидно, что"

$$\mathrm{Tr}(-)^F q^{L_0} = \prod_{n\geq 0}(1-q^n)^2 = 0 \tag{9.57}$$

[4] Очевидно, что этот оператор совпадает $F = J_0 = N$ по модулю 2, т.е. $(-)^F = (-)^{J_0}$.