Листок 5. Мера Лебега

Анализ, 2 курс, **26.11.2014**

5◇1 **а)** (регулярность меры Лебега). Докажите, что для любого измеримого множества $A \subseteq R$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{ открыто}\} = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ компактно}\}.$$

б) Докажите, что всякое измеримое по Лебегу множество $A \subseteq R$ представимо в виде $A = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\right) \cup N$, где K_n – компакты и N –множество меры 0. Как следствие, всякое измеримое по Лебегу множество отличается от некоторого борелевского на множество меры 0.

5◇2 Какова мера Лебега множества тех точек из $[0,1]$, которые в троичной записи содержат конечное число единиц?

5◇3 Определим меру μ на $[0,1]$ формулой $\mu([a,b)) = \log_2 \frac{1+b}{1+a}$. Докажите, что эта мера сохраняется при преобразовании $x \to \{\frac{1}{x}\}$, где фигурные скобки означают дробную часть числа.

5◇4 Каждое действительное число $x \in [0,1]$ можно разложить в непрерывную дробь $x = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \dots}}$, $n_k \in \mathbb{N}$ (при рациональных x дробь конечная).

а) Проверьте, что преобразование из предыдущей задачи в терминах последовательностей $\{n_k\}$ имеет вид $\{n_k\} \to \{n_{k+1}\}$ (сдвиг, при котором стирается первый элемент, а остальные сдвигаются на одну позицию влево).

б) Вычислите меру в пространстве последовательностей, соответствующую мере μ из предыдущей задачи.

5◇5 **а)** Модифицируйте конструкцию канторова множества и докажите, что для каждого $a \in (0,1)$ существует нигде не плотное замкнутое множество $K \subset [0,1]$ меры a. (На математическом а слэнге его именуют “жирным Кантором”.)

б) Какую меру может иметь нигде не плотное подмножество отрезка $[0,1]$ (укажите все возможности)?

5◇6 Можно ли представить любое открытое множество на плоскости, как объединение счетного числа дизъюнктных замкнутых прямоугольников?

5◇7 Существует ли измеримое по Лебегу множество A, такое, что для любого отрезка $[a,b]$ выполнено $\mu(A \cap [a,b]) = \frac{b-a}{2}$?

5◇8 Приведите пример **а)** неизмеримого по Лебегу множества на прямой; **б)** неизмеримого по Лебегу множества на плоскости; **в)** измеримого по Лебегу множества на плоскости, проекции которого на координатные оси неизмеримы.

5◇9 Пусть A – измеримое по Лебегу множество ненулевой меры. Докажите, что множество $A - A$ содержит некоторую окрестность нуля.