Листок 6. Измеримые функции

Анализ, 2 курс, **1.1.2015**

Срок сдачи листка — первый в январе прием задач по анализу.

Определим функцию $c(x)$ в концах отрезка $[0,1]$, полагая $c(0)=0$ и $c(1)=1$, а затем доопределим ее на «средней трети» $[1/3,2/3]$ этого отрезка формулой $c(x)=(c(0)+c(1))/2$. Затем проделаем ту же процедуру с отрезками $[0,1/3]$ и $[2/3,1]$ в итоге получим функцию на множестве $\{0\}\cup[1/9,2/9]\cup[1/3,2/3]\cup[7/9,8/9]\cup\{1\}$, принимающую на отрезках $[1/9,2/9]$ и $[7/9,8/9]$ значения $1/4$ и $3/4$ соответственно. Продолжая этот процесс, получим функцию $c: D\to[0,1]$, где $D\supset[0,1]\setminus C$, а C – канторово множество.

6◇1 **а)** Докажите, что построенная выше функция $c: D\to[0,1]$ единственным образом продолжается до непрерывной функции $c:[0,1]\to[0,1]$. Эта функция называется *канторовой лестницей.*
б) Докажите, что $c(x)$ не убывает на $[0,1]$, и $c'(x)=0$ п.в. на [0,1].
в) Верно ли, что при непрерывном отображении множество меры ноль переходит в множество меры ноль?
г) Верно ли, что непрерывные функции отображают измеримые множества в измеримые?

Пусть $I\subseteq\mathbb{R}$ – промежуток. Функция $f: I\to\mathbb{R}$ называется измеримой по Лебегу, если она $(\mathcal{M}(\mathbb{R});Bor(\mathbb{R}))$-измерима, и борелевской, если она $(Bor(\mathbb{R});Bor(\mathbb{R}))$-измерима.

6◇2 Пусть $f(x)$ — измеримая функция на множестве $A\in\mathbb{R}$, докажите, что $f^2(x)$ тоже измерима на A.

6◇3 Постройте такую функцию $f(x)$ на $[0,1]$, что $f^2(x)$ измерима относительно классической меры Лебега на $[0,1]$, но $f(x)$ неизмерима относительно этой меры.

6◇4 Пусть $(a,b)\subset\mathbb{R}$ и $f(x)$ — конечная функция на (a,b), измеримая относительно классической меры Лебега на этом интервале. Доказать, что множество $A=\{x\in(a,b)\ :\ \text{существует конечная } f'(x)\}$ измеримо относительно классической меры Лебега на (a,b) и что $f'(x)$ измерима на A.

6◇5 Пусть $I\subseteq\mathbb{R}$ – промежуток.
а) Докажите, что каждая непрерывная функция $f: I\to\mathbb{R}$ – борелевская.
б) Пусть X – множество, $A\subseteq 2^X$ – σ-алгебра, $f: X\to\mathbb{R}$ – $\mathcal{A}$-измеримая функция, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – борелевская функция. Докажите, что $g\circ f$ – $\mathcal{A}$-измеримая функция.
в) Докажите, что любая измеримая по Лебегу функция $f: I\to\mathbb{R}$ эквивалентна (т.е. равна почти всюду) борелевской.

6◇6 **а)** Докажите, что существует гомеоморфизм (взаимнооднозначное непрерывное отображение, обратное к которому тоже непрерывно) одного отрезка на другой, переводящий некоторое измеримое по Лебегу множество в неизмеримое. (Указание: требуемый гомеоморфизм можно изготовить, «подправив» канторову лестницу.)
б) Докажите, что прообраз измеримого по Лебегу множества при непрерывном отображении $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ может не быть измеримым по Лебегу.
в) Верно ли, что композиция измеримых по Лебегу функций измерима по Лебегу?
г) Используя результат п. (б), придумайте еще одно доказательство существования измеримых по Лебегу неборелевских множеств на прямой.
д) Докажите, что существуют измеримые по Лебегу неборелевские функции на $\mathbb{R}$.