Листок 7. Интеграл Лебега

Анализ, 2 курс, **16.1.2015**

Срок сдачи листка — 30 января 2014 года.

7◇1 Пусть μ — «считающая» мера на $2^{\mathbb{Z}}$ (мера множества равна числу его элементов). Придумайте простое необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Чему равен $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$?

7◇2 Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Докажите, что измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ интегрируема тогда и только тогда, когда $\sum_{n=0}^{\infty} \mu\{x \in X : |f(x)| > n\} < \infty$.

7◇3 **а)** Пусть f — интегрируема по Лебегу и для любого измеримого множества $B \subset A$, выполнено равенство

$$\int_B f d\mu = 0.$$

Докажите, что $f(x) = 0$ почти всюду на A.

б) Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – интегрируемая по Лебегу функция, причем $\int_{[a,x]} f d\mu = 0$ для любого $x \in [a, b]$. Докажите, что $f = 0$ почти ввсюду.

7◇4 (*Неравенство Чебышева.*) Пусть функция $f \in L(A)$, неотрицательна на A и $A_\varepsilon = \{x | x \in A,\ f(x) \geqslant \varepsilon\}$, при $\varepsilon > 0$. Доказать, что

$$\mu(A_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_A f d\mu.$$

7◇5 Пусть $A_1, \dots, A_n$ – измеримые подмножества отрезка $[0, 1]$ и $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) > n - 1$. Докажите, что есть точка $a \in [0, 1]$, принадлежащая сразу всем A_i.

7◇6 Пусть (X, μ) – пространство с мерой. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ интегрируемых функций на X сходится к интегрируемой функции f в среднем, если $\int_X |f - f_n| d\mu \to 0$, $(n \to \infty)$.

а) Докажите, что если $\mu(X) < \infty$, то равномерная сходимость влечет сходимость в среднем.

б) Верно ли предыдущее утверждение, если $\mu(X) = \infty$?

в) Докажите, что сходимость в среднем влечет сходимость по мере.

г) Придумайте пример последовательности интегрируемых по Лебегу функций на отрезке, сходящейся к нулю в среднем, но не сходящейся ни в одной точке.

д) Придумайте пример последовательности интегрируемых по Лебегу функций на отрезке, сходящейся к нулю в каждой точке, но не сходящейся в среднем ни к какой интегрируемой функции.

7◇7 Пусть $c : [0, 1] \to [0, 1]$ — канторова лестница. Вычислите интегралы: **а)** $\int_0^1 c(x) dx$; **б*)** $\int_0^1 x d\mu_c(x)$, где μ_c — мера Стилтьеса на $[0, 1]$, соответстсующая функции $c(x)$.