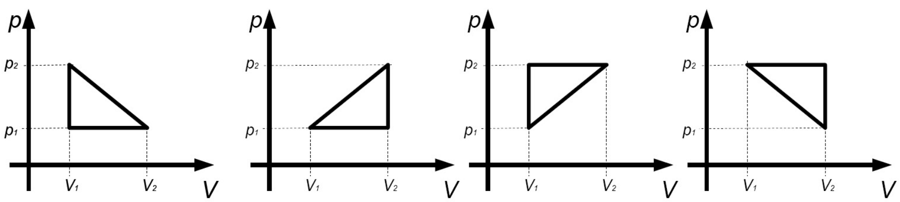
Статистическая физика. Листок 1.

Задача 1. Пусть идеальный газ, уравнения состояния которого в некоторых единицах имеют вид $pV = T$ и $U = T$, совершает работу в циклических процессах, показанных на рисунке (обход по часовой стрелке), где в тех же единицах $V_1 = 1, V_2 = 2, p_1 = 1, p_2 = 2$. Вычислите работу и КПД всех процессов. Какой процесс имеет максимальный КПД? Сравните с КПД цикла Карно с температурами нагревателя и холодильника $T_h = p_2V_2, T_c = p_1V_1$.



Задача 2. Два из пяти фундаментальных уравнений, приведенных ниже, не согласуются с постулатами термодинамики.

а) Для каждого случая рассмотрите зависимость энтропии S от внутренней энергии U (при постоянных числе частиц N и объеме V), выберите два физически недопустимых уравнения, и объясните какие принципы они нарушают.

б) Для трех физически допустимых уравнений найдите зависимость U от S и запишите уравнения состояния. Убедитесь, что температура T , давление p и химический потенциал μ — интенсивные переменные. Ниже α и R положительные (размерные) постоянные.

$$
\begin{aligned}
a) \quad S &= \alpha(NVU)^{1/3} \\
b) \quad S &= \alpha\left(\frac{NU}{V}\right)^{1/3} \\
c) \quad S &= \alpha\frac{V^3}{NU} \\
d) \quad S &= NR\log(\alpha UV/N^2) \\
e) \quad U &= \alpha\frac{S^2}{V}\exp\left(\frac{S}{nr}\right)
\end{aligned}
$$

Задача 3. Каждая из систем A и B, разделенных жесткой, непроницаемой, адиабатической стенкой, описывается уравнением (a) из задачи 2. Система A имеет объем 9×10^{-6}м^3 и количество вещества 3 моля, а система B – объем 4×10^{-6}м^{3}и количество вещества 2 моля. Полная энергия системы – 80 Дж. Постройте энтропию как функцию отношения $U_A/(U_A + U_B)$. Чему будут равны внутренние энергии подсистем, после того как стенка между ними станет диатермальной, и система придет к тепловому равновесию.

Задача 4. Фундаментальное уравнение газа Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$s = s_0 + \mathcal{R}\ln[(v - b)/(v_0 - b)] + (3/2)\mathcal{R}\ln\mathrm{sh}[c(u + a/v)],$$

где $v = V/N, u = U/N, s = S/N$. Покажите, что одно из уравнений состояния имеет вид

$$(P + a/v^2)(v - b) = \mathcal{R}T.$$

Запишите его в виде вириального разложения и найдите первые вириальные коэффициенты. Выпишите остальные уравнения состояния.

Задача 5. Многие соотношения между термодинамическими величинами следуют из правил дифферецирования функций многих переменных. В частности, если переменные x, y, x связаны соотношением $f(x, y, z) = 0$, то выполняются равенства:

$$(i)(\partial x/\partial y)_z = 1/[(\partial y/\partial x)_z]$$

$$(ii)(\partial x/\partial y)_z(\partial y/\partial z)_x(\partial z/\partial x)_y = -1$$

Еще одна серия соотношений, называемая соотношениями Максвелла, есть следствие перестановочности перекрестных производных

$$(iii)(\partial/\partial x)_y(\partial w/\partial y) = (\partial/\partial y)_x(\partial w/\partial x).$$

Другими словами если $dw = Mdx + Ndy$, то $(\partial M/\partial y)_x = (\partial M/\partial x)_y$. Наконец в более общем случае имеются соотношения для якобианов:

$$[\partial(u, v)/\partial(y, z)] = [\partial(u, v)/\partial(w, z)][\partial(w, z)/\partial(x, y)].$$

$$[\partial(w, x)/\partial(y, z)][\partial(s, t)/\partial(u, v)] = [\partial(w, x)/\partial(u, v)][\partial(s, t)/\partial(y, z)]$$

$$\partial(x, z)/\partial(y, z) = (\partial x/\partial y)_z = \partial(z, x)/\partial(z, y)]$$

а) Используя соотношения выше докажите равенства

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S},\ C_P - C_V = VT\frac{\alpha^2}{\kappa_T}$$

где $C_P, C_V, \kappa_T, \kappa_S$– изобарная, изохорная теплоемкости и изотермическая, адиабатическая сжимаемости, соответственно:

$$C_R = \left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_R,\ \kappa_R = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_R,$$

а $\alpha = V^{-1}(\partial V/\partial T)_P$– коэффициент объемного расширения.

б) Используя третий закон термодинамики, докажите, что в простой жидкости C_P, C_V и α стремятся к нулю при $T \to 0$. (Простая жидкость — система одинаковых взаимодействующих молекул, термодинамическое состояние которой полностью задается тремя экстенсивными переменными U, V, N.)

в) Вычислите C_P и C_Vдля газа Ван-дер-Ваальса.

Задача 6. Космологи рассматривают Вселенную как расширяющуюся полость с электромагнитным излучением, температура которого в данный момент 2,7 К. Зависимость внутренней энергии равновесного электромагнитного излучения U от энтропии S и объема V имеет вид

$$U(S, V) = aV\left(\frac{3S}{4aV}\right)^{4/3},$$

где $a = 4\sigma/c$ — радиационная постоянная, выраженная через постоянную Стефана-Больцмана $\sigma = 5,67$Дж·с$^{-1}\cdot$ м$^{-2}\cdot$ К$^{-4}$ и скорость света $c = 3 \times 10^8$м/с.

а) Получите оба уравнения состояния в канонической форме, а также термическое уравнение состояние, связывающее температуру, давление и объем.

б) Какова будет температура излучения когда объем Вселенной увеличится вдвое, по сравнению с его текущим значением, если предположить что при расширении энтропия остается постоянной (это неочевидное следствие расчетов с принятыми космологическими моделями)?

в) Чему равно давление? Выразите ответ в паскалях и атмосферах.

Задача 7. Фундаментальное уравнение термодинамики для сильно анизотропного парамагнетика

$$U = NRT_0 \exp\left[\frac{S}{NR} + \frac{M^2}{N^2 M_0^2}\right],$$

где T_0и M_0–положительные константы, а M – проекция магнитного момента на магнитное поле напряженностью H. Напомним, что работа совершаемая магнетиком при изменении магнитного момента в магнитном поле H равна

$$dW = -\overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{M}.$$

Запишите уравнение состояния для $T(S,M,N)$,$H(S,M,N)$, $\mu(S,M,N)$. Вычислите свободную энергию Гельмгольца и свободную энергию Гиббса, как функции переменных (T,M,N) и (T,H,N) соответственно.

Задача 8. (О сверхпроводящем переходе) Многие металлы становятся сверхпроводниками при низкой температуре T и в маленьком магнитном поле H. Теплоемкости металла в сверхпроводящей и нормальной фазах в нулевом магнитном поле $H = 0$ равны соответственно

$$\begin{aligned} C_s &= V\alpha T^3, \\ C_n &= V[\beta T^3 + \gamma T], \end{aligned}$$

где V-объем, а α, β, γ — константы. (Изменением объема в этой задаче можно пренебречь.)

а) Используя третий закон термодинамики, вычислите энтропии $S_n(T)$ и $S_s(T)$ нормальной и сверхпроводящей фаз.

b) Эксперименты показывают, что скрытая теплота перехода (теплота, затрачиваемая на превращение одной фазы в другую) равна нулю, $L = 0$. Используйте эту информацию, чтобы вычислить температуру перехода T_c как функцию α, β, γ.

c) При нулевой температуре электроны в сверхпроводнике образуют куперовские пары, что приводит к понижению внутренней энергии сверхпроводника на $V\Delta$, т.е. $U_n = E_0$ в нормальном металле, и $U_s = E_0 - V\Delta$ в сверхпроводнике. Вычислите внутренние энергии обоих фаз при конечной температуре.

d) Сравнивая свободные энергии Гиббса $G(T,H,N)$ (или химические потенциалы) двух фаз, получите выражение для энергетической щели Δ через α, β, γ.

f) В присутствии магнитного поля учет магнитной работы дает $dU = TdS + HdM + \mu dN$. Сверхпроводящая фаза — идеальный диамагнетик, не пропускающий магнитное поле внутрь, засчет появления магнитного момента $M_s = -HV/4\pi$, противоположного магнитному полю. Нормальный металл с хорошей точностью немагнитный, т.е. $M_n = 0$. Используйте эту информацию, вместе с предыдущими результатами, чтобы показать, что сверхпроводник превращается в нормальный металл в магнитном поле большем чем

$$H_c(T) = H_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right)$$

и найти выражение для H_0.