

## Дискретная математика

### Семинар 1

ВШЭ, факультет математики

первый курс, третий модуль

1. Сколько подмножеств множества  $\{1, \dots, n\}$  содержит хотя бы одно нечётное число?
2. Сколькими способами можно упорядочить буквы в слове МИССИС-СИППИ таким образом, чтобы четыре буквы С не стояли подряд?
3. Сколько существует функций  $f : \{1, \dots, 5\} \rightarrow \{1, \dots, 5\}$ , таких что  $\#f^{-1}(k) \leq 2$  для всех  $k = 1, \dots, 5$ ?
4. Докажите (по-возможности, комбинаторно) следующие равенства:

$$\text{а). } \sum_{i=0}^n \binom{x+i}{i} = \binom{x+n+1}{n},$$

$$\text{б). } \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n2^{n-1},$$

$$\text{в)*. } \sum_{i=0}^n \binom{2i}{i} \binom{2(n-i)}{n-i} = 4^n.$$

5. а). Сколько существует путей на плоскости из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n_1, n_2)$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , состоящих из отрезков  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ ?  
б). Обобщите пункт а) на высшие размерности (пути в  $d$ -мерном пространстве).
6. а). Пусть  $p$  – простое число,  $n = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$ ,  $m = \sum_{i \geq 0} b_i p^i$  –  $p$ -ичные разложения чисел  $n$  и  $m$ . Покажите, что

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{a_0}{b_0} \binom{a_1}{b_1} \dots \pmod{p}.$$

- б). При каких  $n$ ,  $m$  биномиальный коэффициент  $\binom{n}{m}$  нечётный? При каких  $n$  все биномиальные коэффициенты  $\binom{n}{m}$ ,  $0 \leq m \leq n$  нечётны?

7. Назовём разложением числа  $n$  равенство вида  $n = a_1 + \dots + a_k$ ,  $a_i > 0$ . Например, число 3 имеет ровно 4 разложения  $3 = 3$ ,  $3 = 2 + 1$ ,  $3 = 1 + 2$ ,  $3 = 1 + 1 + 1$ . Числа  $a_i$  называются частями разложения.

- а). Найдите число разложений числа  $n$ .  
б). Найдите число разложений числа  $n$ , имеющих чётное число чётных частей.