

## Дискретная математика

### Семинар 2

ВШЭ, факультет математики  
первый курс, третий модуль

1. Числа Фибоначчи  $F_k$  определяются по формулам:  $F_1 = F_2 = 1$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  при  $n \geq 3$ . Выразите через числа Фибоначчи:

- число подмножеств множества  $\{1, \dots, n\}$ , не содержащих никаких двух последовательных чисел.
- число разложений  $n$  на части, равные 1 или 2.
- число разложений  $n$  на нечётные слагаемые.
- число последовательностей  $(a_1, \dots, a_n)$  нулей и единиц, таких что  $a_1 \leq a_2 \geq a_3 \leq a_4 \geq \dots$ .

2. При каком значении (значениях)  $k$  величина  $\binom{n}{k}$  максимальна (при фиксированном  $n$ )?

3. Определим  $q$ -биномиальные коэффициенты (многочлены Гаусса) по формуле:

$$\binom{n}{k}_q = \frac{\prod_{i=n-k+1}^n (1 - q^i)}{\prod_{i=1}^k (1 - q^i)}.$$

Докажите, что

- $\binom{n}{m}_q = \binom{n-1}{m}_q + q^{n-m} \binom{n-1}{m-1}_q$ .
- $\binom{n}{m}_q = q^m \binom{n-1}{m}_q + \binom{n-1}{m-1}_q$ .
- $\lim_{q \rightarrow 1} \binom{n}{m}_q = \binom{n}{m}$ .

4. Постройте функцию  $f$  на множестве  $\Lambda_k$   $k$ -элементных подмножеств множества  $\{1, \dots, n\}$ , такую что

$$\sum_{M \in \Lambda_k} q^{f(M)} = \binom{n}{k}_q.$$

5. Докажите, что число  $k$ -мерных подпространств  $n$ -мерного пространства над полем из  $q$  элементов равно  $\binom{n}{k}_q$ .

6. Пусть  $f_k(n)$  – число перестановок из  $S_n$ , имеющих ровно  $k$  инверсий. Докажите, что при  $n \geq k$   $f_k(n+1) = f_k(n) + f_{k-1}(n+1)$ . Докажите, что при  $n \geq k$   $f_k(n)$  есть полином от  $n$  степени  $k$  со старшим коэффициентом  $1/k!$ . Вычислите  $f_2(n)$  при  $n \geq 2$ .