

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

А. В. Домрин, А. Г. Сергеев

Лекции по комплексному анализу

Первое полугодие

Москва
2004

УДК 517.5
ББК (В)22.16
Д66

Домрин А. В., Сергеев А. Г.

Д66 Лекции по комплексному анализу : В 2 частях. / А. В. Домрин,
А. Г. Сергеев. — М.: МИАН, 2004.

ISBN 5-98419-006-0

Часть I : Первое полугодие. — 2004. — 176 с.

ISBN 5-98419-007-9

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-14126).

ISBN 5-98419-007-9 (ч. I) © Домрин А. В., Сергеев А. Г., 2004
ISBN 5-98419-006-0 © Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН, 2004

Памяти Анатолия Георгиевича Витушкина

Содержание

Первое полугодие	1
Лекция 1. Комплексная плоскость	1
1.1. Определение	1
1.2. Алгебраическая структура	2
1.3. Полярное представление	2
1.4. Топология комплексной плоскости	4
1.5. Компактификация комплексной плоскости	8
Лекция 2. Комплексная дифференцируемость. Геометрический смысл производной	12
2.1. \mathbb{R} -дифференцируемость	12
2.2. \mathbb{C} -дифференцируемость. Условия Коши–Римана	13
2.3. Производная по направлению	15
2.4. Голломорфные функции и конформные отображения	17
2.5. Геометрический смысл комплексной производной	18
2.6. Голломорфность и конформность отображений расширенной комплексной плоскости	20
Лекция 3. Дробно-линейные функции	21
3.1. Дробно-линейные отображения расширенной комплексной плоскости	21
3.2. Конформность дробно-линейных отображений	22
3.3. Группа дробно-линейных отображений	23
3.4. Круговое свойство дробно-линейных отображений	24
3.5. Сохранение симметрии при дробно-линейных отображениях	26
3.6. Свойство трех точек	30
3.7. Дробно-линейные изоморфизмы основных областей	31
Лекция 4. Интеграл и первообразная	35
4.1. Определение интеграла вдоль пути	35
4.2. Свойства интеграла вдоль пути	38
4.3. Лемма Гурса	42
4.4. Первообразная	45
4.5. Первообразная вдоль пути	47
Лекция 5. Теорема Коши	53
5.1. Теорема Коши о гомотопии	53
5.2. Теорема Коши для многосвязной области	59

5.3.	Интегральная формула Коши	62
Лекция 6.	Ряды Тейлора	65
6.1.	Напоминание	65
6.2.	Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора	66
6.3.	Неравенства Коши	67
6.4.	Теорема Лиувилля	67
6.5.	Множество точек сходимости степенного ряда .	68
6.6.	Голоморфность суммы степенного ряда	72
6.7.	Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций	74
6.8.	Коэффициенты ряда Тейлора	74
6.9.	Интегральная формула Коши для производных	75
6.10.	Теорема Морера	75
6.11.	Три эквивалентных определения голоморфной функции	76
6.12.	Разложение голоморфной функции в окрестности нуля	76
6.13.	Теорема единственности	78
6.14.	Теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций	79
6.15.	Аппроксимация голоморфных функций полиномами	81
Лекция 7.	Ряды Лорана и особые точки	82
7.1.	Разложение голоморфной функции в ряд Лорана	82
7.2.	Сходимость рядов по целым степеням $z - a$. . .	85
7.3.	Неравенства Коши для коэффициентов Лорана	86
7.4.	Замечание о рядах Лорана и Фурье	87
7.5.	Изолированные особые точки. Определение . . .	88
7.6.	Описание устранимых особых точек	89
7.7.	Описание полюсов	90
7.8.	Теорема Сохоцкого	93
7.9.	$a = \infty$ как изолированная особая точка	94
7.10.	Целые функции с полюсом на бесконечности . .	95
7.11.	Мероморфные функции с полюсом на бесконечности	95
Лекция 8.	Вычеты	97
8.1.	Теорема Коши о вычетах	97
8.2.	Вычет в терминах ряда Лорана	98
8.3.	Формулы для вычисления вычетов	99
8.4.	Вычет в точке $a = \infty$	100

8.5.	Теорема о полной сумме вычетов	101
8.6.	Лемма Жордана	101
8.7.	Пример на вычисление преобразования Фурье от рациональных функций	103
Лекция 9.	Аналитическое продолжение. Постановка задачи	106
9.1.	Постановка задачи	106
9.2.	Аналитическое продолжение Γ -функции	107
9.3.	Аналитическое продолжение логарифма	110
Лекция 10.	Теория Вейерштрасса	114
10.1.	Постановка задачи	114
10.2.	Элементы и их аналитическое продолжение	115
10.3.	Свойства непосредственного аналитического про- должения	116
10.4.	Продолжение канонических элементов вдоль пути	118
10.5.	Эквивалентность аналитического продолжения по цепочке и вдоль пути	120
10.6.	Теорема о продолжении вдоль гомотопных путей	122
Лекция 11.	Аналитические функции	126
11.1.	Определения	126
11.2.	Пример: аналитическая функция \sqrt{z}	128
11.3.	Пример: аналитическая функция $\ln z$	130
11.4.	Действия над аналитическими функциями	131
11.5.	Изолированные особые точки аналитической функции	134
11.6.	Классификация изолированных особых точек	136
11.7.	Примеры аналитических функций и их особых точек	138
11.8.	Ряды Пуансо	140
Лекция 12.	Римановы поверхности	144
12.1.	Риманова поверхность функции $w = \sqrt{z}$	144
12.2.	Риманова поверхность функции $w = \ln z$	147
12.3.	Риманова поверхность функции $w = \arcsin z$	147
12.4.	Риманова поверхность аналитической функции	149
12.5.	Одномерные комплексные многообразия	150
12.6.	Неразветвленные голоморфные накрытия	152
12.7.	Риманова поверхность аналитической функции (продолжение)	158
Список литературы		163

Второе полугодие	165
Лекция 13. Принцип аргумента	165
13.1. Логарифмический вычет	165
13.2. Принцип аргумента	167
13.3. Теорема Руше	169
Лекция 14. Принцип сохранения области и обращение голоморфных функций	174
14.1. Принцип сохранения области	174
14.2. Локальное обращение голоморфных функций	175
14.3. Теорема Гурвица	179
Лекция 15. Принцип максимума модуля и его следствия	181
15.1. Принцип максимума модуля	181
15.2. Лемма Шварца	183
Лекция 16. Принцип компактности. Последовательности голоморфных функций	186
16.1. Принцип компактности	186
16.2. Теорема Монтеля	188
16.3. Непрерывные функционалы на семействах голоморфных функций	190
Лекция 17. Теорема Римана	192
17.1. Автоморфизмы основных областей	192
17.2. Теорема Римана	195
Лекция 18. Соответствие границ и принцип симметрии	200
18.1. Принцип соответствия границ	200
18.2. Принцип симметрии	203
Лекция 19. Конформное отображение полуплоскости на многоугольник	213
19.1. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник	213
19.2. Интеграл Кристоффеля–Шварца	219
Лекция 20. Эллиптические функции	225
20.1. Эллиптический синус	225
20.2. Периоды мероморфных функций	228
20.3. Определение и свойства эллиптических функций	230
Лекция 21. Функция Вейерштрасса	234
21.1. Определение и основные свойства	234
21.2. Описание эллиптических функций с заданной решеткой периодов	239

21.3.	Дифференциальное уравнение для функции Вейерштрасса	242
Лекция 22.	Реализация тора в виде кубической кривой в \mathbb{C}^2	246
22.1.	Определения тора и кубической кривой в \mathbb{C}^2	246
22.2.	Параметризация кубической кривой с помощью функции Вейерштрасса	248
22.3.	Сложение точек на кубической кривой	250
Лекция 23.	Модулярная функция и теорема Пикара	254
23.1.	Построение модулярной функции	254
23.2.	Теорема Пикара	262
Лекция 24.	Гармонические функции	265
24.1.	Определение и основные свойства гармонических функций	265
24.2.	Задача Дирихле	270
Дополнение.	Физическая интерпретация голоморфных функций и доказательство теоремы Римана	276
Д.1.	Гидродинамическая интерпретация конформных отображений	276
Д.2.	“Физическое” доказательство теоремы Римана	283
Д.3.	Другие физические интерпретации голоморфных функций	287
Список литературы	289

Предисловие

В основу книги легли записи лекций по комплексному анализу, которые на протяжении ряда лет читались авторами студентам механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Мы решились издать ее по предложению Петра Лаврентьевича Ульянова.

При ее написании мы, конечно, испытали влияние многих курсов комплексного анализа, изданных ранее (перечисление всех этих курсов заняло бы слишком много места, поэтому в списке литературы приведены лишь основные). Однако наибольшее воздействие оказали на нас лекции Бориса Владимировича Шабата (книга “Введение в комплексный анализ” в списке литературы) и оставшиеся, к сожалению, неизданными лекции Анатолия Георгиевича Витушкина. Их воздействие проявилось даже не столько в конкретных заимствованиях (хотя и таких примеров, по-видимому, достаточно), сколько в самих идеях построения лекционного курса. Б. В. Шабату в его лекциях удалось найти “золотую середину” между строгостью и доступностью, общностью и конкретностью в изложении материала. Крен в любую из указанных сторон приводит, как известно, к неизбежным потерям. От А. Г. Витушкина мы восприняли идею о том, что задачи, включаемые в курс, должны составлять с ним единое целое, дополняя, расширяя и углубляя текст лекций (но не заменяя его, как в некоторых курсах). Исходя из этого, задачи должны сопровождать каждую лекцию (а не составлять отдельный список в конце книги).

Несколько замечаний о структуре книги. Весь годовой курс разделен на два полугодия, отвечающие двум стандартным семестрам (лекции по комплексному анализу читаются ныне студентам мехмата 3-го года обучения). В то же время деление на лекции является в достаточной мере условным — они соответствуют, скорее, темам, нежели “реальным” лекциям.

Приводимые задачи носят в основном “теоретический” характер. При этом мы постарались исключить стандартные задачи, решаемые на практических семинарах по комплексному анализу (которые можно найти в известных задачниках по комплексному анализу, см., например, [10], [5]).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 04-01-00236, 02-02-04002, 02-01-01291), Программы поддержки ведущих научных школ (гранты № № НШ-1542.2003.1, НШ-2040.2003.1) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

Первое полугодие

Лекция 1. Комплексная плоскость

1.1. Определение. *Комплексная плоскость* \mathbb{C} есть множество упорядоченных пар (x, y) вещественных чисел. Точки комплексной плоскости называются *комплексными числами* и обозначаются $z = (x, y)$. Вещественные компоненты x и y называются соответственно *вещественной* и *мнимой частью* комплексного числа $z = (x, y)$ и обозначаются через

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Каждому комплексному числу $z = (x, y)$ сопоставляется *комплексно сопряженное* к нему число $\bar{z} := (x, -y)$.

Множество вещественных чисел (вещественную ось) \mathbb{R} принято отождествлять с подмножеством \mathbb{C} вида $\mathbb{R} = \{(x, 0)\}$, которое, иначе, можно определить как

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : z = \bar{z}\}.$$

Выделим, кроме того, подмножество

$$i\mathbb{R} = \{(0, y)\} = \{z : z + \bar{z} = 0\},$$

состоящее из комплексных чисел, называемых *чисто мнимыми*. Его можно также отождествить с \mathbb{R} .

Рассматривая множество комплексных чисел \mathbb{C} как вещественную плоскость \mathbb{R}^2 , можно ввести на нем *структуру векторного пространства* (над полем вещественных чисел \mathbb{R}). Естественный базис в $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ задается векторами $1 := (1, 0)$ и $i := (0, 1)$, так что любое комплексное число $z = (x, y)$ в этом базисе записывается в виде

$$z = (x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i \equiv x + iy.$$

1.2. Алгебраическая структура. Введем на множестве комплексных чисел \mathbb{C} умножение, которое на базисных элементах 1 и i задается по правилу

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad i \cdot i = -1,$$

а далее продолжается по линейности на все \mathbb{C} . Иначе говоря, произведение произвольных комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равно

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Это произведение на множестве комплексных чисел вместе с операцией сложения, задаваемой отождествлением $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, удовлетворяет, как нетрудно проверить, всем аксиомам поля. Тем самым, \mathbb{C} является *полем комплексных чисел*. Роль единицы в этом поле выполняет число $1 := (1, 0)$, а роль обратного к произвольному комплексному числу $z = x + iy$, не равному нулю $0 := (0, 0)$, играет комплексное число z^{-1} , равное

$$z^{-1} \equiv \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Основным отличием поля комплексных чисел от полей рациональных чисел \mathbb{Q} и вещественных чисел \mathbb{R} , известных из курса алгебры, является его *алгебраическая замкнутость*. Это означает, что каждый полином с комплексными коэффициентами имеет в \mathbb{C} корень. Указанное свойство вытекает из основной теоремы алгебры, несколько доказательств которой будут предложены в курсе (см., например, указание к задаче в п. 1.3).

Задача. Докажите теорему Гаусса: корни производной многочлена лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена.

Указание: если точки z_1, \dots, z_n лежат в одной полуплоскости (т.е. по одну сторону от прямой, проходящей через начало координат), то $z_1 + \dots + z_n \neq 0$ и $z_1^{-1} + \dots + z_n^{-1} \neq 0$.

1.3. Полярное представление. Каждое комплексное число $z \neq 0$ может быть записано в *полярной форме*

$$z = re^{i\varphi} := r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (1.1)$$

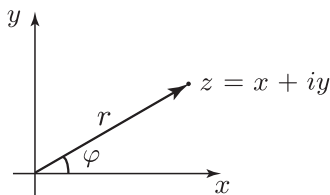


Рис. 1

где положительное число

$$r = |z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$, а в качестве $\varphi \in \mathbb{R}$ можно взять угол $\varphi = \arg z$, $-\pi < \arg z \leq \pi$, между положительным направлением оси \mathbb{R} и вектором z (см. рис. 1). Заметим, однако, что число z , записанное в виде (1.1), не изменится, если в качестве φ взять любое решение системы

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}.$$

Эти решения составляют множество

$$\operatorname{Arg} z := \{\arg z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}, \quad -\pi < \arg z \leq \pi,$$

каждый из элементов которого называется *аргументом* комплексного числа z .

Формула умножения комплексных чисел приобретает в полярной форме удобный вид. Произведение комплексных чисел $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ равно

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Задача. Докажите основную теорему алгебры: любой комплексный полином имеет комплексный корень.

Указание: рассмотрите точку минимума модуля полинома и воспользуйтесь тем, что для любых $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$, найдется комплексное число z такое, что az^k имеет заданный аргумент.

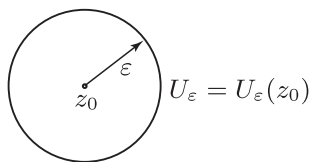


Рис. 2

1.4. Топология комплексной плоскости. Введем на пространстве \mathbb{C} евклидову метрику, отождествляя \mathbb{C} с евклидовой плоскостью \mathbb{R}^2 (т.е. декартовой плоскостью, наделенной стандартной евклидовой метрикой). Эта метрика определяет и естественную *топологию* на \mathbb{C} , в которой база окрестностей произвольной точки $z_0 \in \mathbb{C}$ задается кругами с центром в z_0 (см. рис. 2):

$$U_\varepsilon = U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Пользуясь указанной метрикой и отвечающей ей топологией, можно перенести на множество комплексных чисел \mathbb{C} общие определения и свойства, относящиеся к топологическим и метрическим пространствам. Приведем те из них, которые постоянно используются в этом курсе.

Пути на комплексной плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Путем* на комплексной плоскости \mathbb{C} называется непрерывное отображение

$$\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Два пути $\gamma_1: [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2: [\alpha_2, \beta_2] \rightarrow \mathbb{C}$ называются *эквивалентными* (см. рис. 3), если найдется непрерывная строго возрастающая функция

$$\tau: [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow [\alpha_2, \beta_2],$$

задающая гомеоморфизм $[\alpha_1, \beta_1]$ на $[\alpha_2, \beta_2]$, для которой

$$\gamma_2(\tau(t)) \equiv \gamma_1(t), \quad t \in [\alpha_1, \beta_1].$$

Класс эквивалентности путей называется *кривой*.

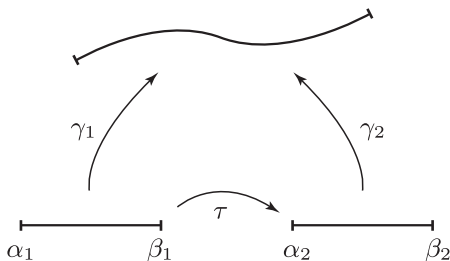


Рис. 3

Заметим, что путь $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ и тот же путь, пройденный в обратном направлении, *не эквивалентны* в указанном выше смысле.

ЗАДАЧА. Какие из следующих путей эквивалентны:

- (1) $e^{2\pi it}, \quad 0 \leq t \leq 1;$
- (2) $e^{4\pi it}, \quad 0 \leq t \leq 1;$
- (3) $e^{-2\pi it}, \quad 0 \leq t \leq 1;$
- (4) $e^{2\pi i \sin t}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2?$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Путь $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ называется *жордановым*, если γ осуществляет взаимно однозначное отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на его образ $\gamma([\alpha, \beta])$. Путь $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ называется *замкнутым жордановым*, если $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ и γ осуществляет взаимно однозначное отображение полуинтервала $[\alpha, \beta)$ на $\gamma([\alpha, \beta))$.

Рассматривая путь $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ как отображение $[\alpha, \beta]$ в евклидову плоскость \mathbb{R}^2 , определим понятие гладкого и кусочно гладкого пути.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предположим, что путь γ задается отображением $[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, для которого в каждой точке $t \in [\alpha, \beta]$ существует производная $\dot{\gamma}(t)$ (применительно к конечным точкам α, β это означает, что в точке α существует производная $\gamma(t)$ справа, а в точке β — производная $\gamma(t)$ слева). Путь γ называется *гладким*, если производная $\dot{\gamma}(t)$ непрерывна по t и $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ при $t \in [\alpha, \beta]$. Путь $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ называется *кусочно гладким* (см. рис. 4), если отрезок $[\alpha, \beta]$ можно разбить точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

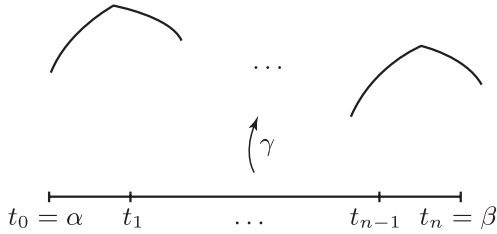


Рис. 4

на конечное число отрезков $[t_{j-1}, t_j]$ так, что ограничение γ на каждый из них является гладким путем.

Эквивалентность гладких и кусочно гладких путей определяется так же, как в случае непрерывных путей, с дополнительным условием, что замена параметра τ и обратная к ней замена τ^{-1} должны задаваться гладкими (соответственно кусочно гладкими) функциями.

Задачи. (1) Покажите, что теорема Лагранжа неверна для \mathbb{C} -значных функций. А именно укажите непрерывно дифференцируемую функцию $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ такую, что $f'(t) \neq f(1) - f(0)$ ни при каком $t \in [0, 1]$.

(2) Докажите следующий аналог теоремы Лагранжа для \mathbb{C} -значных функций. Если функция $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывно дифференцируема, то число $f(1) - f(0)$ принадлежит замыканию выпуклой оболочки множества значений $f'(t)$: $f(1) - f(0) \in \overline{\text{ch } f'([0, 1])}$.

Области на комплексной плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Областью на комплексной плоскости \mathbb{C} называется открытое линейно связное подмножество $D \subset \mathbb{C}$. *Линейная связность* D означает, что для любых двух точек $a, b \in D$ найдется путь γ , соединяющий a с b и лежащий в D .

В частности, всякое выпуклое открытое подмножество $D \subset \mathbb{C}$ является областью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для открытых множеств $D \subset \mathbb{C}$ линейная связность множества D эквивалентна его связности. Последнее означает, что D нельзя представить в виде объединения

двух непустых непересекающихся открытых (или, эквивалентно, замкнутых) подмножеств.

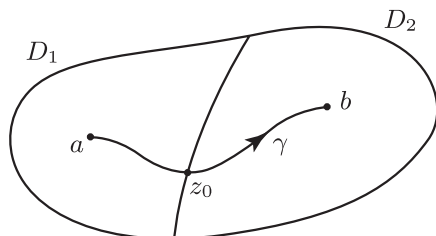


Рис. 5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество D открыто и линейно связно. Покажем, что оно связно. Допустим, что существуют непустые открытые множества $D_1, D_2 \subset D$ такие, что (см. рис. 5)

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset \quad \text{и} \quad D_1 \cup D_2 = D.$$

Выберем любые точки $a \in D_1$, $b \in D_2$, и пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ есть непрерывный путь из определения линейной связности такой, что $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Рассмотрим множество

$$K := \{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in D_1\}$$

и обозначим через t_0 число $t_0 := \sup\{t : t \in K\}$. Имеем $0 < t_0 < 1$, так как оба множества D_1 и D_2 открыты. Точка $z_0 := \gamma(t_0)$ не может принадлежать ни D_1 , ни D_2 . Действительно, в первом случае мы имели бы, что

$$t_0 + \varepsilon \in K \quad \text{для всех достаточно малых } \varepsilon > 0,$$

а во втором случае — что

$$t_0 - \varepsilon \notin K \quad \text{для всех достаточно малых } \varepsilon > 0.$$

Следовательно, $\gamma(t_0) \notin D$ вопреки определению γ . Это противоречие доказывает связность D .

Обратно, пусть множество D открыто и связно. Фиксируем точку $z_0 \in D$ и определим $D_1 \subset D$ как множество всех точек $z \in D$, которые можно соединить с z_0 непрерывным путем

$\gamma: [0, 1] \rightarrow D$. Положим $D_2 := D \setminus D_1$. Поскольку каждая точка $z \in D$ содержится в D вместе с некоторым кругом, а каждую точку круга можно соединить по радиусу с его центром, мы видим, что оба множества D_1, D_2 открыты. Но тогда из связности D вытекает, что одно из них, а именно D_2 , должно быть пусто. Полученное равенство $D_1 = D$ означает, что D линейно связно. ■

Из доказанного утверждения вытекает

ТЕОРЕМА ОБ ОТКРЫТО-ЗАМКНУТОМ ПОДМНОЖЕСТВЕ. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область и $F \subset G$ — непустое подмножество. Если F одновременно открыто и замкнуто в G , то $F = G$.

Напомним, что границей области D называется множество $\partial D := \overline{D} \setminus D$. В этом курсе мы рассматриваем, в основном, области, ограниченные гладкими или кусочно гладкими контурами. В частности, мы будем называть D областью с простой границей, если она ограничена конечным числом кусочно гладких замкнутых жордановых путей (контуров). Ориентация ∂D всегда выбирается так, чтобы область D оставалась слева при обходе вдоль ограничивающих ее замкнутых путей. Иными словами, внешняя граница области D должна быть ориентирована против часовой стрелки, а внутренние компоненты границы — по часовой стрелке.

Приведем еще одно определение, относящееся к областям на комплексной плоскости. Будем говорить, что множество G компактно принадлежит области D (и записывать это как $G \Subset D$), если $\overline{G} \subset D$.

1.5. Компактификация комплексной плоскости. По самому определению комплексной плоскости \mathbb{C} она не является компактным множеством, поэтому удобно ввести в рассмотрение ее компактификацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$ называется одноточечная компактификация \mathbb{C} , получаемая добавлением к \mathbb{C} новой точки ∞ . База окрестностей точки ∞ на $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ задается внешностями кругов $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$.

С учетом этого определения все основные топологические понятия, введенные выше для \mathbb{C} , переносятся и на расширенную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$.

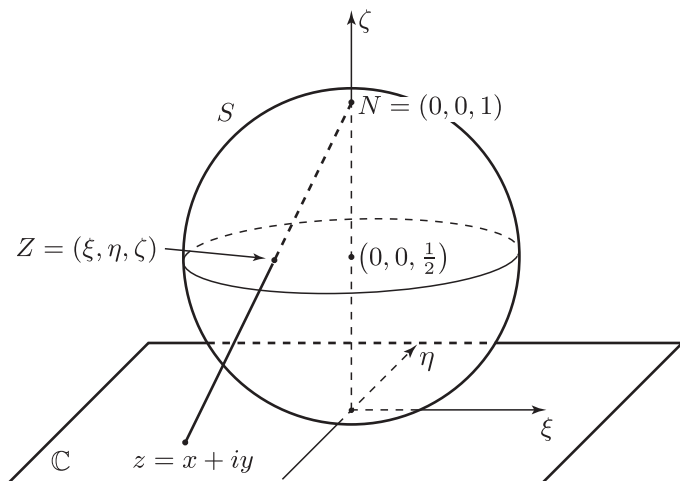


Рис. 6

Стереографическая проекция. Наглядное геометрическое изображение $\overline{\mathbb{C}}$ можно получить с помощью *стереографической проекции*. Пусть

$$S = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

— сфера в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 с центром в точке $(0, 0, \frac{1}{2})$ радиуса $\frac{1}{2}$ (см. рис. 6). отождествим комплексную плоскость \mathbb{C} с плоскостью $\{\zeta = 0\}$ в \mathbb{R}^3 и сопоставим каждой точке $z = x + iy$ точку $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ пересечения сферы S с лучом, соединяющим z с северным полюсом $N = (0, 0, 1)$ сферы S . Для того чтобы выразить координаты точки Z через z , запишем луч параметрически в виде

$$\xi = tx, \quad \eta = ty, \quad \zeta = 1 - t.$$

Его точка пересечения со сферой S отвечает значению параметра t , которое находится из уравнения

$$t^2(x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 = \frac{1}{4} \quad \implies \quad t = \frac{1}{1 + |z|^2}.$$

Следовательно, координаты искомой точки $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ вычисляются по формуле

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}.$$

Обратное отображение находится из соотношения $t = 1 - \zeta$, откуда

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}.$$

Из приведенных формул следует, что *стереографическая проекция* $Z \longleftrightarrow z$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками сферы $S \setminus \{N\}$ без северного полюса N и комплексной плоскости \mathbb{C} . Более того, при этом отображении база проколотых окрестностей точки $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$, состоящей из внешних кругов $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, будет отвечать база проколотых окрестностей северного полюса N на сфере S . Таким образом, если продлить стереографическую проекцию $S \setminus \{N\} \longleftrightarrow \mathbb{C}$ до соответствия $S \longleftrightarrow \overline{\mathbb{C}}$, сопоставляя северному полюсу N точку $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$, то полученное отображение будет осуществлять *гомеоморфизм сферы S с расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$* . Построенная модель расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ называется *сферой Римана*.

Задачи. (1) Какие точки комплексной плоскости отвечают диаметрально противоположным точкам сферы Римана?

(2) Какому преобразованию сферы Римана отвечает преобразование комплексной плоскости вида $z \mapsto 1/z$?

(3) Во что проектируются при стереографической проекции окружности на сфере Римана?

Сферическая метрика. Пользуясь стереографической проекцией, мы можем ввести на \mathbb{C} помимо евклидовой метрики, определяемой посредством

$$|z_1 - z_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad \text{для } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

еще и *сферическую метрику*. Расстояние $\rho(z_1, z_2)$ между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ в этой метрике по определению равно евклидову расстоянию (в \mathbb{R}^3) между их сферическими образами.

ЗАДАЧА. Покажите, что

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

Из этой формулы видно, что в конечной части $\overline{\mathbb{C}}$ (т.е. для точек z_1, z_2 , принадлежащих некоторому кругу $\{|z| < R\}$) сферическое расстояние $\rho(z_1, z_2)$ эквивалентно евклидову в том смысле, что

$$C_1(R)|z_1 - z_2| \leq \rho(z_1, z_2) \leq C_2(R)|z_1 - z_2|$$

(конкретно: $C_1(R) = 1/(1+R^2)$, $C_2(R) = 1$). В то же время расстояние от произвольной точки $z \in \mathbb{C}$ до ∞ в сферической метрике является конечным:

$$\rho(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \leq 1.$$

База проколотых окрестностей точки $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ в метрике ρ задается множествами

$$\{z \in \mathbb{C} : \rho(z, \infty) < \varepsilon\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{\varepsilon^{-2} - 1}\}.$$

Иначе говоря, топология расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, которую мы определили раньше, эквивалентна топологии $\overline{\mathbb{C}}$, задаваемой сферическим расстоянием ρ .

Лекция 2. Комплексная дифференцируемость. Геометрический смысл производной

2.1. \mathbb{R} -дифференцируемость. Рассмотрим \mathbb{C} -значную функцию $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ на комплексной плоскости как отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, сопоставляющее каждой точке $z = x + iy$ точку

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y) + i \operatorname{Im} f(x, y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, определенная в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, называется \mathbb{R} -дифференцируемой в точке z_0 , если $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции от x, y .

Более подробно, рассмотрим точку $z = x + iy$, достаточно близкую к z_0 , и положим $\Delta x := x - x_0$, $\Delta y := y - y_0$. Кроме того, обозначим

$$\Delta z := z - z_0 = \Delta x + i\Delta y, \quad \Delta f := f(z) - f(z_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Тогда \mathbb{R} -дифференцируемость f в точке z_0 эквивалентна существованию констант $a, b \in \mathbb{C}$ таких, что

$$\Delta f = a \cdot \Delta x + b \cdot \Delta y + o(|\Delta z|) \quad \text{при} \quad \Delta z \rightarrow 0.$$

Более формально, это соотношение означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\Delta f - a \cdot \Delta x - b \cdot \Delta y| < \varepsilon |\Delta z|$$

для всех z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$. Из него вытекает, в частности, что функция f имеет частные производные по x и по y в точке z_0 , причем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0, \Delta x = 0} \frac{\Delta f}{\Delta y} = b.$$

ЗАДАЧА. Покажите, что из существования этих частных производных еще не следует \mathbb{R} -дифференцируемость f в точке z_0 .

Указание: Например, функция $f(z) = z^3/|z|^2$, доопределенная в точке $z_0 = 0$ по непрерывности, имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 1$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = -i$, но не является \mathbb{R} -дифференцируемой в точке $z_0 = 0$.

Если выразить Δx и Δy через $\Delta z := \Delta x + i\Delta y$ и $\Delta \bar{z} := \Delta x - i\Delta y$, то условие \mathbb{R} -дифференцируемости f в точке z_0 примет вид

$$\Delta f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) \Delta \bar{z} + o(\Delta z). \quad (2.1)$$

Введем дифференциальные операторы (формальные частные производные по z и \bar{z})

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Из формулы (2.1) вытекает следующее выражение для дифференциала $df(z_0): T_{z_0}\mathbb{C} \rightarrow T_{f(z_0)}\mathbb{C}$ функции f , \mathbb{R} -дифференцируемой в точке z_0 :

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) d\bar{z}.$$

Если отождествить касательные пространства $T_{z_0}\mathbb{C}$ и $T_{f(z_0)}\mathbb{C}$ с комплексной плоскостью \mathbb{C} , то дифференциал $df(z_0): T_{z_0}\mathbb{C} \rightarrow T_{f(z_0)}\mathbb{C}$ будет определять линейное отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, действующее по формуле

$$df(z_0): \zeta \in \mathbb{C} \mapsto df(z_0)\zeta = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \cdot \zeta + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \cdot \bar{\zeta}$$

для всех $\zeta \in \mathbb{C} \approx T_{z_0}\mathbb{C}$.

2.2. \mathbb{C} -дифференцируемость. Условия Коши–Римана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f , определенная в окрестности точки z_0 , называется \mathbb{C} -дифференцируемой в точке z_0 , если найдется комплексное число a такое, что в окрестности точки z_0 имеет место представление

$$\Delta f = f(z) - f(z_0) = a \cdot \Delta z + o(\Delta z).$$

Эквивалентная переформулировка этого определения:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = a + o(1) \quad \text{при} \quad \Delta z \rightarrow 0,$$

т.е. существует предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0).$$

Число $f'(z_0)$ называется *комплексной производной* функции f в точке z_0 .

ТЕОРЕМА. *Функция f , определенная в окрестности точки z_0 , является \mathbb{C} -дифференцируемой в этой точке $\iff f$ является \mathbb{R} -дифференцируемой в точке z_0 и выполняется условие Коши–Римана*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

В этом случае имеем $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. \implies . По определению \mathbb{C} -дифференцируемость f в точке z_0 означает, что функция f является \mathbb{R} -дифференцируемой в точке z_0 и ее дифференциал в этой точке имеет специальный вид:

$$df(z_0)\zeta = a\zeta \quad \text{для всех } \zeta \in \mathbb{C} \approx T_{z_0}\mathbb{C}.$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

\impliedby . \mathbb{R} -дифференцируемость функции f в точке z_0 означает, что

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\Delta \bar{z} + o(\Delta z)$$

в окрестности точки z_0 . Отсюда в силу условия Коши–Римана вытекает, что

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + o(\Delta z),$$

т.е. функция f \mathbb{C} -дифференцируема в точке z_0 . ■

Подставляя $f = u + iv$ в формулу

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

и отделяя вещественную и мнимую части, можно записать *условие Коши–Римана в вещественной форме* (т.е. в терминах вещественнозначных функций $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ и вещественных переменных $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$):

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Выпишем также *условие Коши–Римана* в полярных координатах r, φ , связанных с z, \bar{z} формулами $z = re^{i\varphi}$, $\bar{z} = re^{-i\varphi}$. Дифференцируя эти формулы по \bar{z} и решая полученную систему двух линейных уравнений, находим, что

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \frac{ie^{i\varphi}}{2r}.$$

Следовательно, по теореме о производной сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Применяя этот оператор к $f = u + iv$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 &\iff \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \\ &\iff \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Задачи. (1) Найдите все функции вида $f(z) = u(x) + iv(y)$, являющиеся \mathbb{C} -дифференцируемыми в каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}$.

(2) Пусть функция $f(z)$ является \mathbb{C} -дифференцируемой в окрестности точки z_0 . Определим \mathbb{R} -значные функции $u(z), v(z), \rho(z), \theta(z)$ в окрестности z_0 формулой $f = u + iv = \rho e^{i\theta}$. Докажите, что если хотя бы одна из функций u, v, ρ, θ постоянна в окрестности z_0 , то и $f(z)$ постоянна в окрестности z_0 .

2.3. Производная по направлению. Пусть функция f \mathbb{R} -дифференцируема в точке z_0 . Тогда

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\Delta \bar{z} + o(\Delta z).$$

Воспользуемся полярным представлением $\Delta z = |\Delta z|e^{i\theta}$, так что

$$\Delta \bar{z} = \overline{\Delta z} = |\Delta z|e^{-i\theta} = \Delta z \cdot e^{-2i\theta},$$

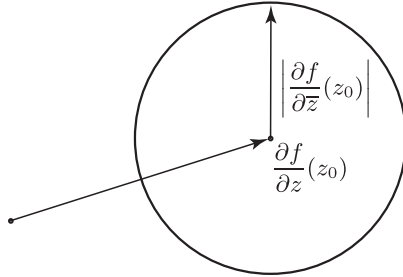


Рис. 7

и перепишем предыдущую формулу в виде

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)e^{-2i\theta} \right) \Delta z + o(\Delta z).$$

Разделим обе ее части на Δz и перейдем к пределу при $\Delta z \rightarrow 0$ при фиксированном аргументе $\arg \Delta z = \theta = \text{const}$. Получим, что из \mathbb{R} -дифференцируемости f в точке z_0 вытекает существование предела

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \arg \Delta z = \theta}} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)e^{-2i\theta} =: f'_\theta(z_0),$$

называемого *частной производной f по направлению θ* . Последняя формула показывает, что при изменении θ от 0 до 2π точка $f'_\theta(z_0)$ описывает дважды пройденную окружность с центром в точке $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ радиуса $\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \right|$ (см. рис. 7). Этим доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть функция f является \mathbb{R} -дифференцируемой в точке z_0 . Ее производная $f'_\theta(z_0)$ в этой точке по направлению θ не зависит от направления тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. В этом случае имеем

$$f'_\theta(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0) \quad \text{для всех } \theta \in \mathbb{R}.$$

2.4. Голоморфные функции и конформные отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f называется *голоморфной в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если она \mathbb{C} -дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Функция f называется *голоморфной в области* D , если она голоморфна в каждой точке этой области.

Множество функций, голоморфных в области D , обозначается через $\mathcal{O}(D)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция f \mathbb{R} -дифференцируема в точке z_0 . Отображение окрестности этой точки в \mathbb{C} , задаваемое функцией f , называется *конформным в точке* z_0 , если его дифференциал $df(z_0)$, рассматриваемый как линейное отображение плоскости \mathbb{R}^2 на себя, невырожден (т.е. взаимно однозначен) и является композицией поворота и растяжения. Отображение, задаваемое функцией f , *конформно в области* D , если оно конформно в каждой точке этой области.

Связь между конформными отображениями и \mathbb{C} -дифференцируемыми функциями устанавливается следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение, задаваемое \mathbb{R} -дифференцируемой функцией f , конформно в точке $z_0 \iff$ функция f является \mathbb{C} -дифференцируемой в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. \Leftarrow . Пусть функция f \mathbb{C} -дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда ее дифференциал

$$df(z_0): \zeta \mapsto f'(z_0)\zeta = |f'(z_0)| e^{i \arg f'(z_0)} \zeta$$

является композицией поворота на угол $\arg f'(z_0)$ и растяжения в $|f'(z_0)|$ раз. Кроме того, он невырожден, так как эта композиция взаимно однозначно отображает \mathbb{R}^2 на себя. Следовательно, отображение f конформно в точке z_0 .

\implies . Пусть функция f \mathbb{R} -дифференцируема в точке z_0 . Ее дифференциал в этой точке имеет вид

$$df(z_0): \zeta \mapsto A\zeta + B\bar{\zeta},$$

где $A := \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, $B := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$. Отображение $\zeta \mapsto i\zeta$ геометрически является поворотом на 90° против часовой стрелки. Поскольку

любые повороты и растяжения коммутируют с этим отображением, то и дифференциал $df(z_0)$ должен коммутировать с ним ввиду конформности f , т.е. должно выполняться равенство

$$Ai\zeta + B\bar{i}\bar{\zeta} = i(A\zeta + B\bar{\zeta}) \quad \text{для всех } \zeta \in \mathbb{C}.$$

Отсюда следует, что $2iB\bar{\zeta} = 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ и, следовательно, $B = 0$. Таким образом, всякое конформное в точке z_0 отображение f является \mathbb{C} -дифференцируемым в этой точке. При этом $f'(z_0) \neq 0$, так как иначе отображение $df(z_0)$ обращалось бы в тождественный нуль, что невозможно ввиду его невырожденности. ■

Задачи. (1) Пусть отображение f конформно в точке z_0 . Покажите, что проходящие через точку z_0 линии уровня $\{z : u(z) = u(z_0)\}$ и $\{z : v(z) = v(z_0)\}$ функций $u(z) := \operatorname{Re} f(z)$ и $v(z) := \operatorname{Im} f(z)$ являются гладкими кривыми в окрестности z_0 и пересекаются в точке z_0 под прямым углом.

(2) Покажите, что якобиан $Jf(z_0)$ всякой \mathbb{R} -дифференцируемой в точке z_0 функции f , рассматриваемой как отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, равен

$$Jf(z_0) = \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \right|^2.$$

В частности, если f конформно в точке z_0 , то $Jf(z_0) > 0$. (Эквивалентная формулировка последнего утверждения: конформные отображения сохраняют ориентацию.)

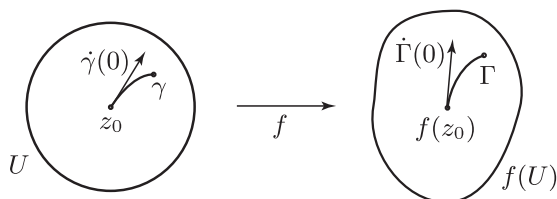


Рис. 8

2.5. Геометрический смысл комплексной производной.

Изучим геометрические свойства конформных отображений. Пусть f конформно в некоторой окрестности U точки z_0 и производная $f'(z)$ непрерывна в U . Рассмотрим гладкий путь γ

в U с началом в z_0 , т.е. гладкое отображение (см. рис. 8)

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow U, \quad \gamma(0) = z_0,$$

удовлетворяющее условию $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ при $t \in [0, 1]$. Композиция

$$\Gamma := f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow f(U)$$

является гладким путем в $f(U)$, так как

$$\dot{\Gamma}(t) = f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t). \quad (2.2)$$

Геометрически $\dot{\gamma}(t)$ представляет собой касательный вектор к кривой $\gamma([0, 1])$ в точке $\gamma(t)$; аналогичную интерпретацию имеет и производная $\dot{\Gamma}(t)$. Поскольку элемент длины дуги γ в точке $\gamma(t)$ равен

$$ds_\gamma(t) = |\dot{\gamma}(t)| dt \quad \text{и, аналогично,} \quad ds_\Gamma(t) = |\dot{\Gamma}(t)| dt,$$

то

$$\frac{ds_\Gamma(0)}{ds_\gamma(0)} = \frac{|\dot{\Gamma}(0)|}{|\dot{\gamma}(0)|} = |f'(z_0)|,$$

т.е. *модуль производной $f'(z_0)$ есть коэффициент растяжения длины дуги в точке z_0 при отображении f .*

Из последнего утверждения следует, в частности, что все дуги, проходящие через точку z_0 , растягиваются в этой точке в одно и то же число раз. Поэтому отображение f переводит малые окружности с центром z_0 в гладкие кривые, совпадающие в первом порядке с окружностями с центром $f(z_0)$. Впрочем, это вытекает уже из описания дифференциала конформного отображения в п. 2.4.

Из формулы (2.2) вытекает также, что

$$\arg f'(z_0) = \arg \dot{\Gamma}(0) - \arg \dot{\gamma}(0),$$

т.е. *аргумент производной $f'(z_0)$ есть угол поворота касательных к дугам в точке z_0 при отображении f .*

В частности, все дуги, проходящие через z_0 , поворачиваются на один и тот же угол. Иными словами, конформное отображение сохраняет углы: угол между двумя дугами, проходящими через z_0 , равен углу между их образами.

ЗАМЕЧАНИЕ. Геометрические свойства конформных отображений не переносятся на голоморфные отображения f с $f'(z_0) = 0$. Например, отображение $f(z) = z^2$ голоморфно в точке $z_0 = 0$, но не сохраняет углы в этой точке.

2.6. Голоморфность и конформность отображений расширенной комплексной плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Комплекснозначная функция f , заданная в окрестности точки $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$, называется *голоморфной* (соответственно *конформной*) в точке $z = \infty$, если функция

$$g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$$

голоморфна (соответственно конформна) в нуле.

ЗАДАЧА. Докажите, что если функция f голоморфна в точке ∞ , то $\lim_{z \rightarrow \infty} f'(z) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, обращающееся в бесконечность в точке $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, называется *голоморфным* (соответственно *конформным*) в точке z_0 , если функция

$$F(z) := \frac{1}{f(z)}$$

голоморфна (соответственно конформна) в z_0 . В частности, если $f(\infty) = \infty$, то голоморфность (соответственно конформность) f в точке $z_0 = \infty$ означает голоморфность (соответственно конформность) функции

$$G(z) := \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{f(1/z)}$$

в нуле.

Лекция 3. Дробно-линейные функции

Геометрия евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 (планиметрия) тесно связана с линейными преобразованиями, переводящими прямые на плоскости снова в прямые. В случае комплексной плоскости \mathbb{C} эту роль выполняют комплексные линейные преобразования вида $z \mapsto az + b$ с комплексными a, b . Точно так же, геометрия расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ (конформная геометрия) связана с дробно-линейными преобразованиями, задаваемыми дробно-линейными функциями вида

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{с комплексными } a, b, c, d.$$

Роль “прямых” в конформной геометрии $\overline{\mathbb{C}}$ играют обобщенные окружности, т.е. прямые или окружности на комплексной плоскости \mathbb{C} . (Они отвечают окружностям на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$.) Дробно-линейные преобразования переводят обобщенные окружности снова в обобщенные окружности (см. п. 3.4).

3.1. Дробно-линейные отображения расширенной комплексной плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Дробно-линейное отображение* задается функцией вида

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Условие $ad - bc \neq 0$ исключает вырожденный случай постоянного отображения $w \equiv \text{const}$. Случай $c = 0$ отвечает линейному отображению

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

(заметим, что в этом случае $d \neq 0$).

Дробно-линейное отображение определено во всех точках расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, кроме $z = -d/c$ (в случае $c \neq 0$) и $z = \infty$. Доопределим его в этих точках. Если $c \neq 0$, то положим

$$w = \infty \quad \text{при } z = -\frac{d}{c} \quad \text{и} \quad w = \frac{a}{c} \quad \text{при } z = \infty.$$

Если же $c = 0$, то положим $w = \infty$ при $z = \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Дробно-линейное отображение задает гомеоморфизм (т.е. взаимно однозначное непрерывное отображение, обратное к которому тоже непрерывно) расширенной комплексной плоскости \mathbb{C} на себя.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c \neq 0$ (случай $c = 0$ разберите самостоятельно). Проверим взаимнооднозначность рассматриваемого отображения. Действительно, каждому значению $w \neq \frac{a}{c}, \infty$ отвечает единственное

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

такое, что $w = f(z)$ (заметим, что $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$). Точке $w = \frac{a}{c}$ отвечает, по определению, $z = \infty$, а точке $w = \infty$ отвечает $z = -\frac{d}{c}$. Проверим теперь непрерывность отображения $z \mapsto w$. В точках $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$ она очевидна, а в точках $z = -\frac{d}{c}, \infty$ вытекает из предельных соотношений

$$\lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

Непрерывность обратного отображения $w \mapsto z$ проверяется аналогично. ■

3.2. Конформность дробно-линейных отображений.

При $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$ конформность отображения

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

вытекает из голоморфности $w = f(z)$ и того, что комплексная производная

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

не равна нулю в этих точках. (Мы видим, что условие $ad - bc \neq 0$ необходимо для конформности отображения $w = f(z)$.)

Проверим конформность $w = f(z)$ в точке $z = -\frac{d}{c}$, считая, что $c \neq 0$ (случай $c = 0$ разберите самостоятельно). Для этого согласно п. 2.6 надо проверить конформность отображения

$$W = \frac{1}{w} = \frac{cz + d}{az + b}$$

в точке $z = -\frac{d}{c}$. Она вытекает из того, что производная

$$\frac{dW}{dz} = \frac{bc - ad}{(az + b)^2}$$

при $z = -\frac{d}{c}$ существует и равна $\frac{c^2}{bc - ad} \neq 0$. Следовательно, исходное отображение $w = f(z)$ конформно в точке $z = -\frac{d}{c}$.

Конформность $w = f(z)$ в точке $z = \infty$ (снова в предположении, что $c \neq 0$) эквивалентна конформности отображения

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a + bz}{c + dz}$$

в нуле, которая проверяется так же, как и выше. Можно доказать ее и по-другому, сославшись на конформность обратного отображения

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

в точке $w = \frac{a}{c}$, которая вытекает из предыдущего случая. Итак, доказано следующее

Предложение 3.2. *Дробно-линейное отображение конформно во всех точках расширенной комплексной плоскости.*

Задача. Можно ли дробно-линейно отобразить:

- (1) единичный круг U на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$;
- (2) единичный круг U на комплексную плоскость \mathbb{C} ;
- (3) комплексную плоскость \mathbb{C} на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$?

3.3. Группа дробно-линейных отображений. Множество Λ всех дробно-линейных отображений является группой относительно операции композиции. Действительно, прямое вычисление показывает, что если

$$f_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} \quad \text{и} \quad f_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$$

— два дробно-линейных отображения, то их композиция $f_1 \circ f_2$ и обратное отображение f_1^{-1} тоже дробно-линейны.

Это утверждение становится очевидным, если реализовать дробно-линейные отображения в виде комплексных 2×2 -матриц.

Указанная реализация строится следующим образом. Сопоставляя каждой обратимой матрице

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

дробно-линейное отображение

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

мы получим гомоморфизм групп

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \Lambda.$$

Этот гомоморфизм сюръективен, а его ядро состоит из всех ненулевых скалярных матриц, т.е. совпадает с $\{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}^*\}$, где $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а I — единичная 2×2 -матрица. Более того, сужение указанного гомоморфизма на группу $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ всех матриц с определителем 1 тоже сюръективно (поскольку числитель и знаменатель в формуле для w можно делить на одно и то же ненулевое комплексное число), а его ядро состоит всего из двух элементов: $\pm I$. Это означает, что имеют место изоморфизмы групп

$$\Lambda \cong \frac{\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})}{\mathbb{C}^*} \cong \frac{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})}{\{\pm I\}} =: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

Группа дробно-линейных отображений Λ не коммутативна. Линейные отображения образуют подгруппу $\Lambda_0 \subset \Lambda$, состоящую в точности из отображений, оставляющих точку $z = \infty$ неподвижной. В матричной реализации элементы Λ_0 изображаются верхнетреугольными матрицами из $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ или $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

3.4. Круговое свойство дробно-линейных отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенной окружностью* (или *окружностью на расширенной комплексной плоскости* $\overline{\mathbb{C}}$) называется любая окружность или прямая на комплексной плоскости \mathbb{C} .

Это определение мотивируется тем, что при стереографической проекции окружностям и прямым на \mathbb{C} отвечают окружности на сфере Римана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Каждое дробно-линейное отображение переводит любую окружность на $\overline{\mathbb{C}}$ снова в окружность на $\overline{\mathbb{C}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $c = 0$ (т.е. для линейных отображений) это утверждение очевидно. С другой стороны, всякое дробно-линейное отображение

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

с $c \neq 0$ можно записать в виде

$$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)} =: A + \frac{B}{z + C},$$

т.е. представить как композицию $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ отображений вида

$$f_1(z) = A + Bz, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = z + C.$$

Иначе говоря, *всякое дробно-линейное отображение можно представить в виде композиции линейных отображений и отображения*

$$z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Для движений плоскости (представляемых в виде композиции сдвига с поворотом) утверждение предложения 3.3 очевидно. Поэтому остается доказать его для отображений $z \mapsto \frac{1}{z}$ и $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$.

Заметим, что в терминах стереографической проекции отображение $z \mapsto \frac{1}{z}$ является поворотом сферы Римана вокруг одного из диаметров на угол π (проверьте это!) и потому сохраняет окружности на сфере Римана.

Можно проверить круговое свойство для отображения $z \mapsto \frac{1}{z}$ и непосредственно. Воспользуемся тем, что в координатах $z = x + iy$ любая окружность на $\overline{\mathbb{C}}$ записывается в виде

$$A(x^2 + y^2) + B_1x + B_2y + C = 0, \quad (3.1)$$

где коэффициенты $A, B_1, B_2, C \in \mathbb{R}$ не равны нулю одновременно и определены однозначно с точностью до умножения на общую ненулевую вещественную константу. (Заметим, что случай $A = 0$ отвечает прямым, случай $A \neq 0$ — обычным окружностям.) Выделяя полные квадраты, легко видеть, что, обратно, всякое уравнение (3.1) с не равными одновременно нулю коэффициентами $A, B_1, B_2, C \in \mathbb{R}$ задает либо окружность на $\overline{\mathbb{C}}$, либо точку или пустое множество.

В комплексных координатах уравнение (3.1) переписывается в виде

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (3.2)$$

где $B = \frac{1}{2}(B_1 - iB_2)$. При отображении $w = \frac{1}{z}$ окружность, заданная уравнением (3.2), переходит в множество, задаваемое уравнением того же вида:

$$A + B\bar{w} + \bar{B}w + Cw\bar{w} = 0.$$

При этом окружность в $\bar{\mathbb{C}}$ не может перейти в точку или пустое множество, так как дробно-линейные отображения взаимно однозначны. Следовательно, всякая окружность на $\bar{\mathbb{C}}$ переходит при отображении $z \mapsto \frac{1}{z}$ снова в окружность на $\bar{\mathbb{C}}$.

Для отображения $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$, это утверждение проверяется аналогичным образом. ■

ЗАДАЧА. Покажите, что уравнение (3.2) с не равными одновременно нулю коэффициентами $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ задает обычную окружность $\iff A \neq 0$, $|B|^2 - AC > 0$. Центр этой окружности есть $z_0 = -\bar{B}/A$, а радиус равен $R = \sqrt{|B|^2 - AC}/|A|$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как отмечалось выше (п. 2.5), любое конформное отображение f обладает круговым свойством в первом порядке, т.е. переводит малые окружности с центром z_0 в замкнутые кривые, совпадающие в первом порядке с окружностями с центром $f(z_0)$. Для дробно-линейных отображений образом окружности (на $\bar{\mathbb{C}}$) является в точности окружность (на $\bar{\mathbb{C}}$), но центр окружности уже не обязательно переходит в центр (приведите пример).

3.5. Сохранение симметрии при дробно-линейных отображениях. В евклидовой геометрии \mathbb{R}^2 имеется естественное понятие симметрии относительно прямых, которое сохраняется при движениях плоскости. Поскольку в $\bar{\mathbb{C}}$ роль “прямых” играют обобщенные окружности, можно ожидать, что в конформной геометрии должно существовать понятие симметрии относительно обобщенных окружностей, сохраняющееся при дробно-линейных преобразованиях $\bar{\mathbb{C}}$. Поскольку симметрия относительно прямых в \mathbb{C} вводится так же, как на евклидовой плоскости, остается определить симметрию относительно окружностей на \mathbb{C} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ называются *симметричными относительно окружности* $\Gamma = \{|z - z_0| = R\}$ (см. рис. 9),

если они лежат на одном луче с началом в точке z_0 и произведение их расстояний до z_0 равно R^2 :

$$|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2.$$

Центр z_0 окружности Γ будем считать симметричной точке ∞ относительно Γ .

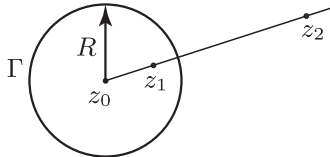


Рис. 9

ЛЕММА. Точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ симметричны относительно обобщенной окружности $\Gamma = \{z : Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0\}$ (см. формулу (3.2) из п. 3.4) тогда и только тогда, когда

$$Az_1\bar{z}_2 + Bz_1 + \bar{B}\bar{z}_2 + C = 0.$$

Иными словами, чтобы получить условие симметричности точек z_1, z_2 относительно окружности Γ , надо в уравнении Γ заменить z на z_1 , а \bar{z} на \bar{z}_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Рассмотрим вначале случай, когда $\Gamma = \{z : |z - z_0| = R\}$ является обычной окружностью. Тогда условие симметричности z_1, z_2 относительно Γ состоит в том, что аргумент $z_1 - z_0$ совпадает с аргументом $z_2 - z_0$, а модуль $z_1 - z_0$ равен $R^2/|z_2 - z_0|$, т.е.

$$z_1 - z_0 = \frac{R^2}{\overline{z_2 - z_0}}.$$

Записывая это условие в виде

$$(z_1 - z_0)(\bar{z}_2 - \bar{z}_0) = R^2 \iff z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_0z_1 - z_0\bar{z}_2 + z_0\bar{z}_0 = R^2$$

и сравнивая его с уравнением исходной окружности Γ :

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2 \iff z\bar{z} - \bar{z}_0z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = R^2,$$

мы убеждаемся в том, что утверждение леммы верно в рассматриваемом случае.

2°. Предположим теперь, что Γ есть прямая с уравнением $Bz + \overline{B}z + C = 0$, т.е. $\operatorname{Re}(Bz + \frac{1}{2}C) = 0$. Деля все коэффициенты на $|B|$, можно без потери общности считать, что $|B| = 1$. Заметим, что в частном случае $B = 1, C = 0$ утверждение леммы становится очевидным: точки z_1, z_2 симметричны относительно мнимой оси $\{\operatorname{Re} z = 0\} \iff z_1 + \overline{z_2} = 0$. Общий случай сводится к рассмотренному, поскольку отображение $w = Bz + \frac{1}{2}C$, будучи композицией поворота и сдвига, сохраняет симметрию относительно прямых: точки z_1, z_2 симметричны относительно прямой $\Gamma = \{\operatorname{Re}(Bz + \frac{1}{2}C) = 0\} \iff$ точки $w_1 = Bz_1 + \frac{1}{2}C$ и $w_2 = Bz_2 + \frac{1}{2}C$ симметричны относительно прямой $\{\operatorname{Re} w = 0\}$. Последнее равносильно тому, что $w_1 + \overline{w_2} = 0$, т.е.

$$Bz_1 + \frac{1}{2}C + \overline{Bz_2} + \frac{1}{2}C = 0 \iff Bz_1 + \overline{Bz_2} + C = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

Пользуясь приведенной леммой, докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Дробно-линейные отображения $w = f(z)$ сохраняют симметрию относительно обобщенных окружностей Γ , т.е. если $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ симметричны относительно Γ , то $f(z_1), f(z_2)$ симметричны относительно $f(\Gamma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякое дробно-линейное отображение есть композиция отображений вида $w = az + b$ и $w = \frac{1}{z}$ (см. доказательство предложения 3.3). Поскольку сохранение симметрии при движениях плоскости (задаваемых композицией сдвига с поворотом) ясно из определения, остается проверить его для отображений вида $w = \frac{1}{z}$ и $w = \lambda z, \lambda > 0$. Будем считать, что ни одна из точек z_1, z_2 не равна ∞ (случай, когда это не так, разберите сами). Требуемое утверждение вытекает из предыдущей леммы. Например, при отображении $w = f(z) = \frac{1}{z}$ произвольная обобщенная окружность

$$\Gamma = \{Az\overline{z} + Bz + \overline{B}z + C = 0\}$$

переходит в обобщенную окружность

$$f(\Gamma) = \{A + B\overline{w} + \overline{B}w + Cw\overline{w} = 0\}.$$

Поэтому если точки z_1, z_2 симметричны относительно Γ , т.е. если

$$Az_1\overline{z_2} + Bz_1 + \overline{B}z_2 + C = 0,$$

то $w_1 = f(z_1) = \frac{1}{z_1}$ и $w_2 = f(z_2) = \frac{1}{z_2}$ удовлетворяют уравнению

$$A + B\bar{w}_2 + \bar{B}w_1 + Cw_1\bar{w}_2 = 0,$$

т.е. точки w_1, w_2 симметричны относительно $f(\Gamma)$. Доказательство сохранения симметрии при отображении $w = \lambda z$ проводится аналогично. ■

Предложение 3.4 можно доказать более геометрическим способом, пользуясь следующим критерием симметричности, доказательство которого мы оставляем в виде задачи.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть Γ — окружность на $\bar{\mathbb{C}}$ (т.е. окружность или прямая на \mathbb{C}). Точки $z_1, z_2 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ симметричны относительно $\Gamma \iff$ любая обобщенная окружность γ на $\bar{\mathbb{C}}$, проходящая через z_1, z_2 , ортогональна Γ (см. рис. 10).

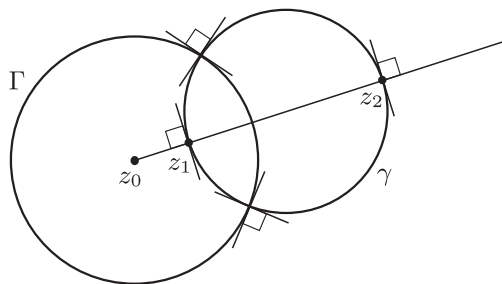


Рис. 10

Доказательство предложения 3.4 с помощью приведенного критерия становится элементарным. Рассмотрим семейство обобщенных окружностей $\{\gamma\}$, которые проходят через точки $z_1, z_2 \in \bar{\mathbb{C}}$, симметричные относительно окружности Γ (мы предполагаем, что $z_1 \neq z_2$). Согласно приведенному критерию все эти окружности ортогональны Γ . Отображение $w = f(z)$ переводит окружности γ в обобщенные окружности $f(\gamma)$ на $\bar{\mathbb{C}}$ (круговое свойство!), которые проходят через точки $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ и ввиду конформности f ортогональны обобщенной окружности $f(\Gamma)$. С другой стороны, применяя обратное отображение $z = f^{-1}(w)$, мы видим, что любая окружность, проходящая через точки w_1 и w_2 , есть образ обобщенной окружности из семейства $\{\gamma\}$

и потому ортогональна Γ . Поэтому по указанному критерию симметричности точки w_1 и w_2 симметричны друг другу относительно Γ , что и требовалось доказать.

Задачи. (1) Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$. Выведите из предложения 3.4, что следующие свойства обобщенной окружности Γ эквивалентны:

- (а) z_1, z_2 симметричны относительно Γ ;
 (б) Γ задается уравнением $|z - z_1|/|z - z_2| = k$ для некоторого $k > 0$.

(2) Докажите утверждение предыдущей задачи прямым вычислением и дайте, исходя из этого, другое доказательство предложения 3.4.

3.6. Свойство трех точек. Множество дробно-линейных отображений

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

описывается тремя независимыми комплексными параметрами (так как числитель и знаменатель можно разделить на одно и то же ненулевое комплексное число). Поэтому можно ожидать, что для задания дробно-линейного отображения достаточно зафиксировать его значения в трех различных точках.

Предложение 3.5. *Каковы бы ни были три различные точки $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ и три различные точки $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, существует единственное дробно-линейное отображение $w = f(z)$ такое, что*

$$w_k = f(z_k) \quad \text{для } k = 1, 2, 3.$$

Доказательство. Предположим для простоты, что ни одна из точек z_k, w_k не совпадает с ∞ (случай, когда это не так, разберите сами).

Докажем существование f . Дробно-линейное отображение

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки $0, \infty, 1$ на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Аналогично, дробно-линейное отображение

$$f_2(w) = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

переводит точки w_1, w_2, w_3 в $0, \infty, 1 \in \overline{\mathbb{C}}$. Следовательно, дробно-линейное отображение $f(z) = f_2^{-1} \circ f_1(z)$ переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 .

Докажем *единственность* f . Пусть дробно-линейное отображение f переводит точки z_1, z_2, z_3 в w_1, w_2, w_3 . Тогда дробно-линейное отображение $F := f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$ оставляет точки $0, \infty, 1$ неподвижными. Из $F(\infty) = \infty$ следует, что $F(z) = Az + B$. Условие $F(0) = 0$ дает $B = 0$, а тогда условие $F(1) = 1$ влечет $A = 1$. Таким образом, $F(z) = z$ и, следовательно, $f = f_2^{-1} \circ f_1$, т.е. искомое отображение f определено единственным образом. ■

Задачи. (1) Число

$$\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} : \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}$$

называется перекрестным отношением четырех точек z_1, z_2, z_3, z_4 . Покажите, что перекрестное отношение сохраняется при дробно-линейных отображениях.

(2) Покажите, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности в $\overline{\mathbb{C}}$ \iff их перекрестное отношение вещественно.

3.7. Дробно-линейные изоморфизмы основных областей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Дробно-линейным автоморфизмом* области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется дробно-линейное отображение области D на себя.

Из этого определения немедленно следует, что дробно-линейные автоморфизмы произвольной области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ образуют подгруппу в группе Λ всех дробно-линейных отображений.

Изучим дробно-линейные автоморфизмы *основных областей*, к которым мы причисляем расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, комплексную плоскость \mathbb{C} , единичный круг $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и верхнюю полуплоскость $H := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$.

Первые два из следующих утверждений очевидны.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Группа дробно-линейных автоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$ совпадает с группой Λ всех дробно-линейных отображений.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Группа дробно-линейных автоморфизмов \mathbb{C} совпадает с подгруппой $\Lambda_0 \subset \Lambda$ всех линейных отображений.*

Следующее утверждение уже требует доказательства.

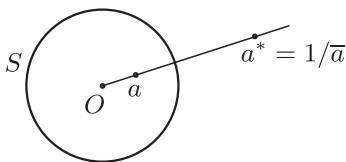


Рис. 11

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Группа дробно-линейных автоморфизмов круга U состоит из всех отображений вида*

$$w = f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \text{где } |a| < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Пусть $w = f(z)$ есть дробно-линейный автоморфизм U . Рассмотрим точку $a := f^{-1}(0) \in U$ и точку $a^* := 1/\bar{a}$, симметричную a относительно единичной окружности $S := \partial U$ (см. рис. 11). Поскольку f отображает S на себя, точка $f(a^*)$ должна в силу предложения 3.4 быть симметрична точке $f(a) = 0$ относительно $f(S) = S$, т.е. $f(a^*) = \infty$. Так как $f(z)$ есть отношение линейных функций, то из равенств $f(a) = 0$, $f(a^*) = \infty$ вытекает, что

$$f(z) = \lambda \frac{z - a}{z - a^*}$$

для некоторой константы $\lambda \in \mathbb{C}$ или

$$f(z) = \lambda_1 \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

для некоторой другой константы λ_1 . Подставляя сюда $z = 1$ и пользуясь тем, что $|f(1)| = 1$ (ибо $f(S) \subset S$), получаем, что $|\lambda_1| = 1$, т.е. всякий дробно-линейный автоморфизм U имеет вид (3.3).

2°. Покажем, что всякое отображение $w = f(z)$ вида (3.3) есть автоморфизм круга U . Заметим, что если $|z| = 1$ (т.е. $z\bar{z} = 1$), то

$$|f(z)| = \frac{|z - a|}{|\bar{z}| \cdot |1 - \bar{a}z|} = \frac{|z - a|}{|\bar{z} - \bar{a}|} = 1,$$

т.е. $f(S) \subset S$. Поскольку $f(S)$ есть обобщенная окружность, получаем, что $f(S) = S$, т.е. $|f(z)| = 1 \iff |z| = 1$. Отсюда следует, что

$|f(z)| < 1$ для всех $z \in U$. (Действительно, допустим, напротив, что $|f(z_0)| > 1$ для некоторой точки $z_0 \in U$. Так как $|f(a)| = 0$, то по теореме о промежуточном значении непрерывная функция $|f(z)|$ должна принимать значение 1 в некоторой точке отрезка $[a, z_0] \subset U$, вопреки тому, что $|f(z)| = 1 \iff |z| = 1$.) Аналогично получаем, что $|f(z)| > 1$ для всех $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}$ (если $|f(z_0)| < 1$ для некоторой точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}$, то соединим z_0 с точкой $a^* = 1/\bar{a}$ непрерывным путем в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}$ и опять придем к противоречию). Следовательно, $f(U) = U$. \blacksquare

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. *Группа дробно-линейных автоморфизмов верхней полуплоскости H состоит из всех отображений вида*

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Пусть $w = f(z)$ есть дробно-линейный автоморфизм H . Тогда f и f^{-1} переводят расширенную вещественную ось $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ в себя, так что точки

$$x_1 := f^{-1}(0), \quad x_2 := f^{-1}(\infty), \quad x_3 := f^{-1}(1)$$

принадлежат $\overline{\mathbb{R}}$. Будем считать, что ни одна из точек x_1, x_2, x_3 не равна ∞ (случай, когда это не так, разберите сами). Тогда согласно предложению 3.5 f записывается в виде

$$f(z) = \frac{z - x_1}{z - x_2} \cdot \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1},$$

т.е.

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

для некоторых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. При этом $f(i) \in H$, т.е. $\text{Im } f(i) > 0$. Это означает, что

$$\text{Im} \left(\frac{ai + b}{ci + d} \right) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} > 0,$$

откуда $ad - bc > 0$. Таким образом, f имеет вид (3.4).

2°. Нужно показать, что всякое отображение $w = f(z)$ вида (3.4) есть автоморфизм H . Это можно сделать так же, как

в п. 2° доказательства утверждения 3.3. Другой способ: покажите, что всякая функция $w = \frac{az+b}{cz+d}$ с вещественными a, b, c, d удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{Im} w = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \operatorname{Im} z$$

для всех $z \in \mathbb{C}$. Отсюда снова вытекает, что отображение (3.4) есть автоморфизм верхней полуплоскости H . ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Дробно-линейным изоморфизмом* области $D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ на область $D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется дробно-линейное отображение области D_1 на D_2 .

Задачи. (1) Обобщенным кругом (или кругом на $\overline{\mathbb{C}}$) называется область, ограниченная окружностью на $\overline{\mathbb{C}}$ (т.е. круг, внешность круга или полуплоскость на \mathbb{C}). Покажите, что любые два круга на $\overline{\mathbb{C}}$ дробно-линейно изоморфны. В частности, верхняя полуплоскость H дробно-линейно изоморфна единичному кругу U .

(2) Найдите все дробно-линейные изоморфизмы верхней полуплоскости на единичный круг.

Лекция 4. Интеграл и первообразная

4.1. Определение интеграла вдоль пути. Пусть $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно гладкий путь, параметризованный отрезком $I = [\alpha, \beta]$. Рассмотрим функцию $f: \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C}$ такую, что композиция $f \circ \gamma$ непрерывна на I . Тогда комплекснозначная функция

$$g(t) = f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$$

интегрируема по Риману на $I = [\alpha, \beta]$ и ее интеграл

$$\int_{\gamma} f dz := \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt \quad (4.1)$$

называется *интегралом от функции f вдоль пути γ* .

Напомним (см. п. 1.4), что путь $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ называется кусочно гладким, если отрезок $I = [\alpha, \beta]$ можно разбить точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

на конечное число отрезков $[t_{j-1}, t_j]$ так, что ограничение γ на каждый из них является гладким путем. Поэтому интеграл, задаваемый формулой (4.1), можно представить в виде суммы

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt$$

интегралов от непрерывных функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Мотивируя обозначение $\int_{\gamma} f dz$, мы можем представить интеграл (4.1) в виде предела интегральных сумм, отнесенных к пути γ . А именно рассмотрим произвольное разбиение

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$$

отрезка $I = [\alpha, \beta]$ и перенесем его на образ $\gamma(I)$ (см. рис. 12), полагая

$$z_0 := a = \gamma(\alpha), z_1 := \gamma(t_1), \dots, z_{n-1} := \gamma(t_{n-1}), z_n := b = \gamma(\beta).$$

Выберем произвольным образом точки

$$\zeta_j := \gamma(\tau_j), \quad \text{где } t_{j-1} < \tau_j < t_j \quad \text{при } j = 1, \dots, n.$$

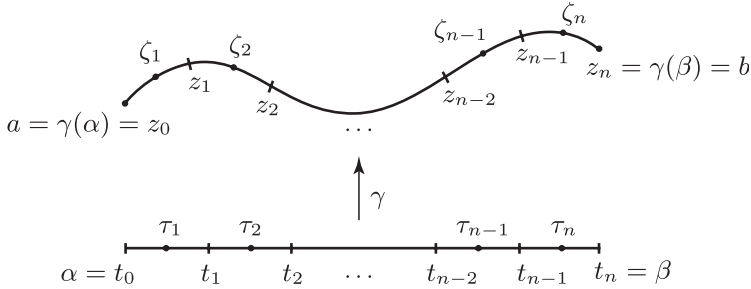


Рис. 12

Тогда

$$\int_{\gamma} f dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j,$$

где $\Delta z_j := z_j - z_{j-1}$, а $\delta := \max_{j=1, \dots, n} |\Delta z_j|$. (Заметим, что согласно определению кусочно гладкого пути $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ для всех точек $t \in I$, кроме конечного числа; поэтому условие $\delta \rightarrow 0$ эквивалентно тому, что $\max_{j=1, \dots, n} |t_j - t_{j-1}| \rightarrow 0$.)

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Можно также понимать $\int_{\gamma} f dz$ как криволинейный интеграл от комплекснозначной дифференциальной формы. А именно для $f = u + iv$ и $dz = \dot{\gamma}(t) dt = dx + i dy$ имеем

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx),$$

где в правой части стоят криволинейные интегралы от вещественных дифференциальных форм.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Данное выше определение интеграла сохраняет смысл и для *спрямляемого пути*, т.е. пути $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$, задаваемого функцией $\gamma(t)$ такой, что производная $\dot{\gamma}(t)$ существует почти всюду на I и функция $|\dot{\gamma}(t)|$ интегрируема по Лебегу на I . Интеграл $\int_{\gamma} f dz$ снова задается формулой (4.1), в правой части которой стоит интеграл Лебега от $f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$. При этом от функции f достаточно требовать лишь, чтобы композиция $f \circ \gamma$ была измерима и ограничена на I .

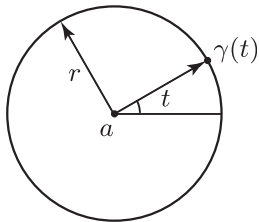


Рис. 13

Разберем два примера вычисления интегралов вдоль пути, которые будут постоянно встречаться в дальнейшем.

ПРИМЕР 4.1. Напомним, что в п. 1.3 мы формально ввели экспоненциальную функцию комплексного переменного, полагая

$$e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{для любых } x, y \in \mathbb{R}.$$

Из этого определения немедленно следует, что:

- (1) $e^{z+2\pi i} = e^z$ для всех $z \in \mathbb{C}$;
- (2) для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ производная функции $e^{i\alpha t}$ по параметру $t \in \mathbb{R}$ равна $i\alpha e^{i\alpha t}$.

Запишем окружность радиуса r с центром в точке $a \in \mathbb{C}$ в параметрическом виде (см. рис. 13):

$$z = \gamma(t) = a + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

и вычислим интеграл вдоль γ от функции $f(z) = (z - a)^n$ для всех целых n . Имеем

$$\dot{\gamma}(t) = ire^{it}, \quad f(\gamma(t)) = r^n e^{int},$$

откуда

$$\int_{\gamma} (z - a)^n dz = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Применяя к полученному интегралу формулу Ньютона–Лейбница (которая, очевидно, сохраняет силу для комплекснозначных функций вещественного переменного), получим при $n \neq -1$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \frac{e^{2\pi i(n+1)} - 1}{i(n+1)},$$

что равно нулю в силу периодичности функции e^z с периодом $2\pi i$ (свойство (1) выше). При $n = -1$ непосредственное вычисление дает:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Следовательно,

$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{при } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \\ 2\pi i & \text{при } n = -1. \end{cases}$$

ПРИМЕР 4.2. Пусть $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ — произвольный гладкий путь. Вычислим интеграл вдоль γ от функции $f(z) = z^n$ для $n = 0, 1, 2, \dots$. Пользуясь опять формулой Ньютона–Лейбница для комплекснозначных функций вещественного переменного, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^n dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \gamma^n(t) \dot{\gamma}(t) dt = \frac{1}{n+1} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} [\gamma^{n+1}(t)] dt \\ &= \frac{\gamma^{n+1}(\beta) - \gamma^{n+1}(\alpha)}{n+1} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл $\int_{\gamma} z^n dz$ зависит лишь от начала a и конца b пути γ . В частности, интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Следующая задача показывает, что при $n = -1$ это уже не так.

ЗАДАЧА. Для $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ положим $L(b) := \{c \in \mathbb{C} : e^c = b\}$. Покажите, что для произвольного $b = re^{i\theta}$ с $r > 0$ и $\theta \in \mathbb{R}$ это множество совпадает с $\{c = \log r + i\theta + 2\pi in : n \in \mathbb{Z}\}$ и для любого $c \in L(b)$ существует путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с началом в точке 1 и концом в точке b такой, что $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = c$.

4.2. Свойства интеграла вдоль пути. Перечисляемые ниже свойства интеграла очевидны и приводятся нами без доказательства (исключение составляет лишь последнее свойство 5°).

1°. **ЛИНЕЙНОСТЬ.** Если функции f, g непрерывны вдоль кусочно гладкого пути γ и $a, b \in \mathbb{C}$, то

$$\int_{\gamma} (af + bg) dz = a \int_{\gamma} f dz + b \int_{\gamma} g dz.$$

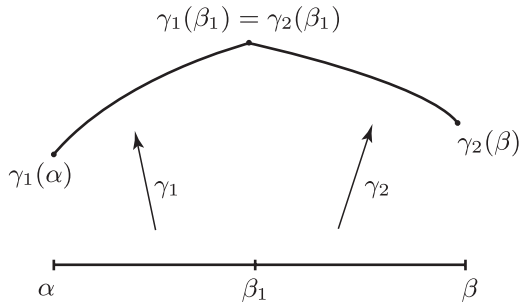


Рис. 14

2°. Аддитивность. Пусть

$$\gamma_1: [\alpha, \beta_1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2: [\beta_1, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$$

— кусочно гладкие пути с $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\beta_1)$ (см. рис. 14). Определим кусочно гладкий путь

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C},$$

полагая

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{при } \alpha \leq t \leq \beta_1, \\ \gamma_2(t) & \text{при } \beta_1 \leq t \leq \beta. \end{cases}$$

Если функция f непрерывна вдоль $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, то

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Пользуясь этой формулой, определение интеграла из п. 4.1 можно распространить на “несвязные” кусочно гладкие пути $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$, состоящие из нескольких связанных кусочно гладких компонент $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. А именно интеграл по подобному пути γ определяется как сумма интегралов по $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. При таком определении интеграл будет аддитивен по отношению к объединениям $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ любых кусочно гладких путей γ_1, γ_2 .

3°. НЕЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ. Пусть

$$\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$$

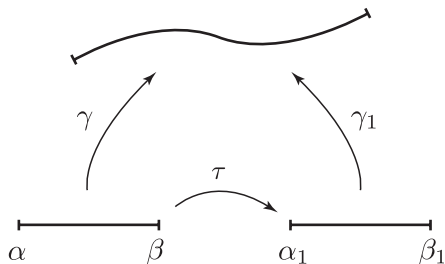


Рис. 15

есть кусочно гладкий путь, полученный из кусочно гладкого пути $\gamma_1: [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow \mathbb{C}$ заменой параметра, т.е.

$$\gamma = \gamma_1 \circ \tau,$$

где $\tau: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha_1, \beta_1]$ — непрерывно дифференцируемая строго возрастающая функция, осуществляющая гомеоморфизм $[\alpha, \beta]$ на $[\alpha_1, \beta_1]$ (см. рис. 15). Если функция $f: \gamma([\alpha, \beta]) \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна вдоль γ , то она непрерывна вдоль γ_1 и

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma} f dz.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Напомним (см. п. 1.4), что кусочно гладкая кривая — это класс эквивалентности кусочно гладких путей относительно замен параметра τ указанного выше вида. Свойство 3° позволяет говорить об интеграле вдоль пути как об *интеграле вдоль кривой*, не уточняя параметризации кривой.

4°. **ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ОРИЕНТАЦИИ.** Пусть кусочно гладкий путь

$$\gamma^{-1}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$$

получается из кусочно гладкого пути $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ сменой ориентации, т.е.

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(\alpha + \beta - t) \quad \text{при} \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Если функция $f: \gamma([\alpha, \beta]) \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна вдоль γ , то она непрерывна вдоль γ^{-1} и

$$\int_{\gamma^{-1}} f dz = - \int_{\gamma} f dz.$$

5°. ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛА. Пусть функция f непрерывна вдоль кусочно гладкого пути $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда справедлива оценка

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|,$$

где

$$\int_{\gamma} |f(z)| |dz| := \int_{\alpha}^{\beta} |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt$$

есть криволинейный интеграл первого рода от функции $|f|$ вдоль пути γ . В частности, если

$$|f(z)| \leq M \quad \text{при всех } z \in \gamma([\alpha, \beta]),$$

то

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot |\gamma|,$$

где $|\gamma|$ — длина пути γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $J := \int_{\gamma} f(z) dz$ и запишем J в полярной форме $J = |J|e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|J| = e^{-i\theta} J = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Взяв вещественную часть, получим

$$\begin{aligned} |J| &= \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re}\{e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)\} dt \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt, \end{aligned}$$

т.е. справедлива оценка

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

Второе утверждение немедленно вытекает из этой оценки, поскольку

$$|\gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

■

Задача. Покажите, что в последнем свойстве нельзя заменить $|dz|$ на dz . А именно пользуясь примером 4.1 из п. 4.1, укажите гладкий путь $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ и непрерывную вдоль γ (и даже голоморфную в окрестности $\gamma(I)$) функцию $f: \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C}$, для которых не справедливо неравенство

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz,$$

хотя обе его части и вещественны.

4.3. Лемма Гурса. В примере 4.2 из п. 4.1 мы отмечали, что интеграл от функции $f(z) = z^n$ с натуральным n по любому замкнутому контуру равен нулю. Указанное утверждение представляет собой один из частных случаев интегральной теоремы Коши, занимающей центральное место в первой части данного курса. На протяжении этой части мы приведем несколько вариантов указанной теоремы, постепенно уточняя и обобщая ее формулировку. Первый вариант, получающийся применением формулы Стокса, можно дать уже сейчас.

Допустим, что C^1 -гладкая функция f голоморфна в области D и $G \Subset D$ — компактная подобласть в D , граница которой описывается замкнутым кусочно гладким путем $\gamma: I \rightarrow D$ с $\gamma(I) = \partial G$. Тогда, применяя формулу Стокса к комплекснозначной дифференциальной форме $\alpha = f dz$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \alpha &= \int_G d\alpha = \int_G d(f dz) = \int_G df \wedge dz \\ &= \int_G (f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}) \wedge dz = \int_G f_{\bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен нулю ввиду уравнения Коши–Римана, выполняющегося для голоморфных функций.

Приведенное рассуждение имеет один существенный недостаток — чтобы применение формулы Стокса было законным, нужно предполагать (как это и было сделано выше), что $f \in C^1(D)$. Мы увидим далее, что это условие является совершенно излишним — теорема Коши верна и без него. В данном параграфе мы сделаем первый шаг в направлении этой общей теоремы Коши (не включающей дополнительных предположений о гладкости подынтегральной функции f), а именно докажем ее в случае, когда под область G является треугольником. Указанный вариант теоремы Коши принято называть *леммой Гурса*.

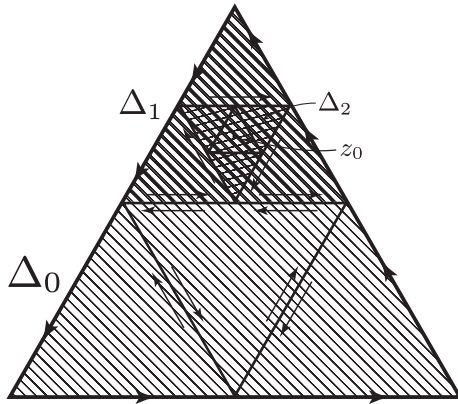


Рис. 16

ЛЕММА ГУРСА. Если функция f голоморфна в области D , то ее интеграл по границе любого треугольника $\Delta \in D$ равен нулю:

$$\int_{\partial\Delta} f dz = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, напротив, что найдется треугольник $\Delta_0 \in D$ такой, что

$$\left| \int_{\partial\Delta_0} f dz \right| = M > 0. \quad (4.2)$$

Разобьем треугольник Δ_0 средними линиями на четыре треугольника (см. рис. 16). Тогда интеграл от f по $\partial\Delta_0$ будет равен сумме интегралов от f по границам этих четырех треугольников (свойства 2° и 4° из п. 4.2). Из оценки (4.2) вытекает, что хотя бы один из четырех полученных интегралов по модулю будет больше или равен $\frac{M}{4}$. Обозначим соответствующий треугольник через Δ_1 , так что

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

Треугольник Δ_1 снова разобьем средними линиями на четыре меньших треугольника и выберем из них треугольник Δ_2 такой, что

$$\left| \int_{\partial\Delta_2} f dz \right| \geq \frac{M}{4^2}.$$

Продолжая это построение, получим на n -м шаге треугольник Δ_n со свойством

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f dz \right| \geq \frac{M}{4^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Треугольники $\overline{\Delta}_0 \supset \overline{\Delta}_1 \supset \dots \supset \overline{\Delta}_n \supset \dots$ образуют вложенную систему компактов в D , и потому их пересечение содержит некоторую точку $z_0 \in D$.

Воспользуемся теперь условием \mathbb{C} -дифференцируемости f в точке z_0 . Согласно этому условию для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что в окрестности U точки z_0 вида

$$U = U_\delta(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$$

функция f представляется в виде

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0), \quad (4.4)$$

где $|\alpha(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in U$. Пользуясь представлением (4.4), мы можем записать интеграл по границе любого треугольника Δ_n с $\overline{\Delta}_n \in U$ в виде

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta_n} f dz &= \int_{\partial\Delta_n} f(z_0) dz + \int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0) dz \\ &\quad + \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0) dz. \end{aligned}$$

Первые два интеграла в правой части равны нулю — это частные случаи интеграла, вычисленного в примере 4.2 из п. 4.1, отвечающие $n = 0$ и $n = 1$. Третий интеграл в силу свойства 5° из п. 4.2 допускает оценку

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0) dz \right| \leq \varepsilon \int_{\partial\Delta_n} |z - z_0| |dz| \leq \varepsilon |\partial\Delta_n|^2,$$

где $|\partial\Delta_n|$ есть периметр треугольника Δ_n . (В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $|z - z_0| < |\partial\Delta_n|$ при $z \in \partial\Delta_n$.) Итак,

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f dz \right| \leq \varepsilon |\partial\Delta_n|^2. \quad (4.5)$$

Но периметр Δ_n легко выразить через периметр исходного треугольника Δ_0 . А именно

$$|\partial\Delta_n| = \frac{|\partial\Delta_0|}{2^n}.$$

Поэтому неравенство (4.5) можно переписать в виде

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f dz \right| \leq \varepsilon \frac{|\partial\Delta_0|^2}{4^n}.$$

Сравнивая его с (4.3), заключаем, что

$$M \leq \varepsilon |\partial\Delta_0|^2$$

для любого $\varepsilon > 0$, т.е. $M = 0$ вопреки предположению. Это противоречие доказывает теорему. ■

4.4. Первообразная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Первообразной* функции f в области $D \subset \mathbb{C}$ называется голоморфная в D функция F такая, что

$$F'(z) = f(z) \quad \text{для всех } z \in D.$$

Сначала рассмотрим вопрос о *единственности* первообразной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Если F — какая-либо первообразная функции f в области D , то все остальные первообразные f в этой области отличаются от F на постоянную, т.е. имеют вид*

$$F(z) + \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F_1, F_2 — две первообразные функции f в D . Тогда функция $\Phi := F_1 - F_2$ голоморфна в D и

$$\Phi'(z) \equiv 0 \quad \text{в } D.$$

Для всякой голоморфной функции Φ ввиду уравнений Коши–Римана (см. п. 2.2) имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -i \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \Phi'(z).$$

Поэтому

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \equiv 0 \quad \text{в } D.$$

Применяя формулу Ньютона–Лейбница по x и по y и пользуясь связностью D , заключаем, что

$$\Phi(z) \equiv \text{const} \quad \text{в } D.$$

■

Переходя к вопросу о *существовании* первообразной, рассмотрим сначала случай круга. Оказывается, достаточным условием существования первообразной в круге является именно то свойство голоморфных функций, выполнение которого гарантируется леммой Гурса. Приводимое ниже доказательство этого утверждения по существу копирует доказательство формулы Ньютона–Лейбница для функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $U := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$, функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна в U и

$$\int_{\partial \Delta} f dz = 0 \quad \text{для любого треугольника } \Delta \Subset U.$$

Тогда функция

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in U,$$

(где интеграл берется по отрезку, соединяющему центр круга a с точкой z) является первообразной функции f в круге U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку $z \in U$ и выберем число $\delta > 0$ так, чтобы круг $\{z+h : h \in \mathbb{C}, |h| < \delta\}$ компактно содержался в исходном круге U (см. рис. 17). Применяя лемму Гурса к функции f и треугольнику с вершинами в точках a , z и $z+h$, $|h| < \delta$, получим

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta.$$

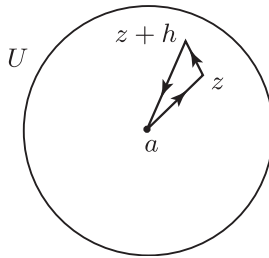


Рис. 17

С другой стороны,

$$f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta,$$

поскольку $\int_z^{z+h} d\zeta = h$ (см. пример 4.2 из п. 4.1). Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta \\ &= f(z) + \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \{f(\zeta) - f(z)\} d\zeta. \end{aligned}$$

Пользуясь оценкой 5° из п. 4.2 и равномерной непрерывностью f в замыкании круга $\{z+h : h \in \mathbb{C}, |h| < \delta\}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \{f(\zeta) - f(z)\} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция F является \mathbb{C} -дифференцируемой в точке z и $F'(z) = f(z)$. \blacksquare

СЛЕДСТВИЕ. *Всякая функция f , голоморфная в круге $U \subset \mathbb{C}$, имеет в U первообразную.*

Доказательство вытекает из предложения 4.2 и леммы Гурса.

4.5. Первообразная вдоль пути. Из следствия, доказанного в конце п. 4.4, вытекает, что функция f , голоморфная в области D , обладает первообразной в любом круге $U \subset D$. Иными словами, она обладает *локальной* первообразной в области D . Можно ли утверждать, что в области D существует и *глобальная* (т.е.

определенная всюду в D) первообразная функции f ? Как мы увидим ниже (см. замечание 4.9), ответ на этот вопрос отрицательный — иными словами, в формулировке упомянутого следствия круг U нельзя заменить на произвольную область $D \subset \mathbb{C}$. Оказывается, существуют топологические препятствия к тому, чтобы локальные первообразные функции f “склеивались” в глобальную первообразную этой функции. Тем не менее, пользуясь локальными первообразными, можно “склеить” из них первообразную f вдоль любого пути $\gamma: I \rightarrow D$. Приведем точное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\gamma: I \rightarrow D$ — произвольный путь в области D и $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ — произвольная функция в этой области. Функция $\Phi: I \rightarrow \mathbb{C}$ называется *первообразной функции f вдоль пути γ* , если:

- (1) Φ непрерывна на I ;
- (2) для любого $t_0 \in I$ можно указать круг $U \subset D$ с центром в точке $z_0 = \gamma(t_0)$ и первообразную F_U функции f в этом круге так, что

$$\Phi(t) = F_U(\gamma(t))$$

для всех t из некоторого открытого интервала $u = u(t_0) \subset I$, содержащего t_0 (см. рис. 18).

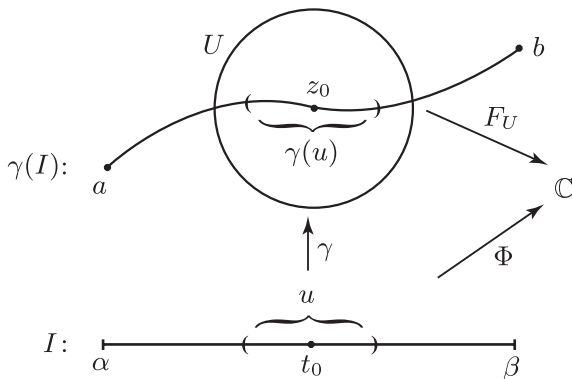


Рис. 18

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Подчеркнем, что Φ является функцией от t , а не от точки $z = \gamma(t)$. В частности, если круги U' и U'' , отвечающие точкам $z' = \gamma(t')$ и $z'' = \gamma(t'')$, пересекаются (см. рис. 19), то

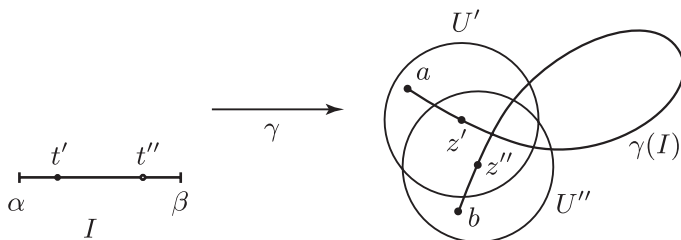


Рис. 19

соответствующие первообразные $F_{U'}$ и $F_{U''}$ не обязательно совпадают на $U' \cap U''$. Они могут отличаться на константу.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Если функция $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ имеет глобальную первообразную $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ в области D , то функция

$$\Phi(t) := F(\gamma(t))$$

является первообразной f вдоль γ для любого пути $\gamma: I \rightarrow D$.

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПЕРВООБРАЗНОЙ ВДОЛЬ ПУТИ. Пусть функция f голоморфна в области D и $\gamma: I \rightarrow D$ — произвольный путь в этой области. Тогда существует первообразная Φ функции f вдоль γ и любые две такие первообразные отличаются на константу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование. Выберем столь мелкое разбиение

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

отрезка $I = [\alpha, \beta]$, что образ каждого из отрезков $I_j := [t_{j-1}, t_j]$ при отображении γ лежит в некотором круге $U_j \subset D$ (см. рис. 20).

Первообразную функции f вдоль пути γ будем строить последовательно, начиная с круга U_1 . Сначала фиксируем первообразную F_1 функции f в круге U_1 . Тогда для любой первообразной F_2 функции f в U_2 имеем

$$F_2 - F_1 \equiv \text{const} \quad \text{на} \quad U_1 \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Вычитая из F_2 эту константу, можно считать, что $F_2 \equiv F_1$ на $U_1 \cap U_2$. Продолжая это построение по индукции, выберем в каждом круге U_j первообразную F_j так, что

$$F_j \equiv F_{j-1} \quad \text{на} \quad U_{j-1} \cap U_j \neq \emptyset.$$

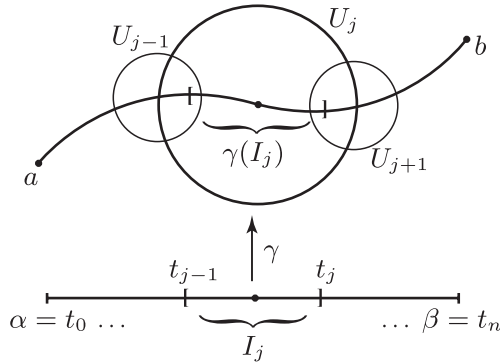


Рис. 20

Определим функцию $\Phi: I \rightarrow \mathbb{C}$, полагая

$$\Phi(t) = F_j(\gamma(t)) \quad \text{при } t \in [t_{j-1}, t_j].$$

Тогда Φ непрерывна на I и является первообразной f вдоль γ .

Единственность. Пусть Φ_1, Φ_2 — две первообразные f вдоль пути γ . Фиксируем точку $t_0 \in I$. Тогда в некоторой окрестности $u \subset I$ точки t_0 будут справедливы представления

$$\Phi_1(t) = F_1(\gamma(t)), \quad \Phi_2(t) = F_2(\gamma(t)),$$

где F_1, F_2 — первообразные f в некотором круге $U \subset D$ с центром в точке $\gamma(t_0)$. Так как $F_1 - F_2 \equiv \text{const}$ в U , то функция $\Phi_1 - \Phi_2$ постоянна на u . Ввиду произвольности $t_0 \in I$ получаем, что функция $\Phi_1 - \Phi_2$ локально постоянна на I , т.е. $\Phi_1 - \Phi_2 \equiv \text{const}$. ■

С помощью первообразной вдоль пути можно обобщить формулу Ньютона–Лейбница на функции комплексного переменного.

ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА. Пусть $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow D$ — кусочно гладкий путь в области D и функция f голоморфна в этой области. Обозначим через Φ первообразную f вдоль γ . Тогда

$$\int_{\gamma} f dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Предположим сначала, что путь γ гладкий и функция f имеет глобальную первообразную F в области D .

Тогда композиция $F \circ \gamma$ является первообразной f вдоль γ (см. замечание 4.7) и потому в силу единственности первообразной вдоль пути будем иметь

$$\Phi(t) = F(\gamma(t)) + \text{const}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Ввиду гладкости пути γ отсюда следует, что функция $\Phi(t)$ непрерывно дифференцируема и

$$\dot{\Phi}(t) = F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t).$$

По определению интеграла вдоль кривой получаем, что

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \dot{\Phi}(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

2°. В *общем случае* можно разбить $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow D$ в объединение конечного числа гладких путей $\gamma_j: [t_{j-1}, t_j] \rightarrow D$ так, чтобы функция f имела первообразную в окрестности образа каждого из этих путей. Тогда к каждому γ_j применимы рассуждения первой части доказательства, откуда

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_j \int_{\gamma_j} f dz = \sum_j (\Phi(t_j) - \Phi(t_{j-1})) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Пользуясь формулой Ньютона–Лейбница, можно определить интеграл от функции f , голоморфной в области D , вдоль любого непрерывного (даже не обязательно спрямляемого) пути $\gamma: I \rightarrow D$, полагая:

$$\int_{\gamma} f dz := \begin{array}{l} \text{приращение первообразной } \Phi \text{ функции } f \\ \text{вдоль } \gamma \text{ на отрезке } I. \end{array}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Функция $f(z) = \frac{1}{z}$ голоморфна в области

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2 \right\},$$

но не имеет глобальной первообразной F в этой области. Действительно, иначе по формуле Ньютона–Лейбница и замечанию 4.7 мы имели бы для любого замкнутого пути $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow D$:

$$\int_{\gamma} f dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = 0,$$

поскольку $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)$. Однако

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

(см. пример 4.1 из п. 4.1). Покажите, что функция g , голоморфная в указанной области D , будет иметь глобальную первообразную в D , если найдется $r \in (\frac{1}{2}, 2)$ такое, что

$$\int_{|z|=r} g dz = 0.$$

Лекция 5. Теорема Коши

5.1. Теорема Коши о гомотопии. Начнем с определения гомотопных путей. При этом нам будет удобно рассматривать пути $\gamma: I = [0, 1] \rightarrow D$ в области D , параметризованные единичным интервалом. (Заменой параметризации любой путь $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow D$ приводится к этому виду.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Два пути $\gamma_0: I \rightarrow D$ и $\gamma_1: I \rightarrow D$ с общими концами

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a, \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$$

называются *гомотопными* в области D , если существует непрерывное отображение $\gamma = \gamma(s, t): I \times I \rightarrow D$ такое, что (см. рис. 21)

$$\begin{aligned} \gamma(0, t) &\equiv \gamma_0(t), & \gamma(1, t) &\equiv \gamma_1(t), & t &\in I, \\ \gamma(s, 0) &\equiv a, & \gamma(s, 1) &\equiv b, & s &\in I. \end{aligned}$$

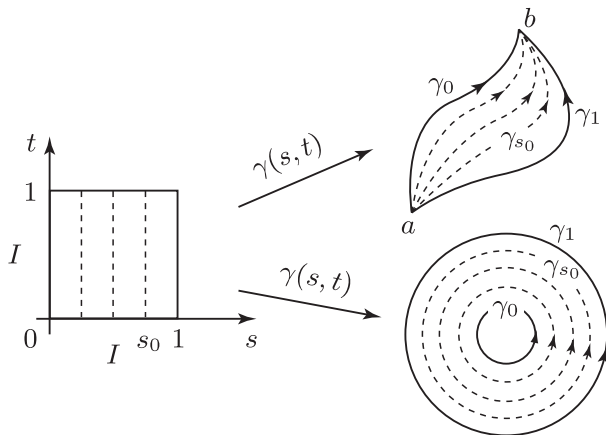


Рис. 21

Тем самым, при любом фиксированном $s \in I$ отображение

$$\gamma_s(t) := \gamma(s, t): I \rightarrow D$$

задает (непрерывный) путь в D с началом в точке a и концом в точке b .

Приведем также вариант предыдущего определения для случая замкнутых путей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Два замкнутых пути

$$\gamma_0: I \rightarrow D, \quad \gamma_1: I \rightarrow D$$

называются *гомотопными* в области D , если существует непрерывное отображение $\gamma = \gamma(s, t): I \times I \rightarrow D$ такое, что (см. рис. 21)

$$\begin{aligned} \gamma(0, t) &\equiv \gamma_0(t), & \gamma(1, t) &\equiv \gamma_1(t), & t &\in I, \\ \gamma(s, 0) &= \gamma(s, 1), & & & s &\in I. \end{aligned}$$

Отношение гомотопности определяет отношение эквивалентности на множестве всех путей в области D , разбивающее это множество на классы гомотопных путей. Для нас особый интерес представляют замкнутые пути, *гомотопные нулю*, т.е. эквивалентные “постоянному” пути $\gamma: I \rightarrow z_0 \in D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Область D называется *односвязной*, если любой замкнутый путь в D гомотопен нулю.

Например, единичный круг $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ односвязен: любой замкнутый путь $\gamma_0: I \rightarrow U$ стягивается в точку гомотопией $\gamma(s, t) = (1 - s)\gamma_0(t)$. Напротив, кольцо $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < |z| < \beta\}$ неодносвязно (см. задачу после следствия 5.1 ниже).

Задача. Покажите, что в односвязной области любые два пути с общими концами гомотопны.

ТЕОРЕМА КОШИ О ГОМОТОПИИ. Если функция f голоморфна в области D и пути γ_0, γ_1 гомотопны в D , то

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

Подчеркнем, что в формулировке теоремы не уточняется, в смысле какого из двух определений 5.1, 5.2 гомотопны пути γ_0, γ_1 — они могут быть гомотопными как пути с общими концами или как замкнутые пути — теорема справедлива в обеих ситуациях. Кроме того, мы не требуем кусочной гладкости путей γ_0, γ_1 . (Интегралы по путям, не являющимся кусочно гладкими, понимаются в смысле замечания 4.8 из п. 4.5.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть семейство путей

$$\gamma_s(t) = \gamma(s, t): I \rightarrow D$$

осуществляет гомотопию γ_0 в γ_1 . Положим

$$J(s) := \int_{\gamma_s} f dz \quad \text{для } s \in I.$$

Нам нужно доказать, что $J(1) = J(0)$. Для этого достаточно показать, что функция $J(s)$ локально постоянна на I , т.е. каждая точка $s_0 \in I$ обладает окрестностью $v = v(s_0) \subset I$ такой, что $J(s) = J(s_0)$ для всех $s \in v$.

Пусть $\Phi: I \rightarrow \mathbb{C}$ — произвольная первообразная функции f вдоль пути γ_{s_0} . Воспользуемся тем же приемом, что и при доказательстве теоремы о существовании первообразной вдоль пути (см. п. 4.5). А именно рассмотрим разбиение отрезка I точками

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$$

на отрезки $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, для которого найдутся (см. рис. 22):

- (1) круги $U_j \subset D$ такие, что $\gamma_{s_0}(I_j) \subset U_j$;
- (2) первообразные $F_j \in \mathcal{O}(U_j)$ функции f в U_j такие, что

$$\Phi = F_j \circ \gamma_{s_0} \quad \text{на } I_j \quad \text{при всех } j = 1, \dots, n.$$

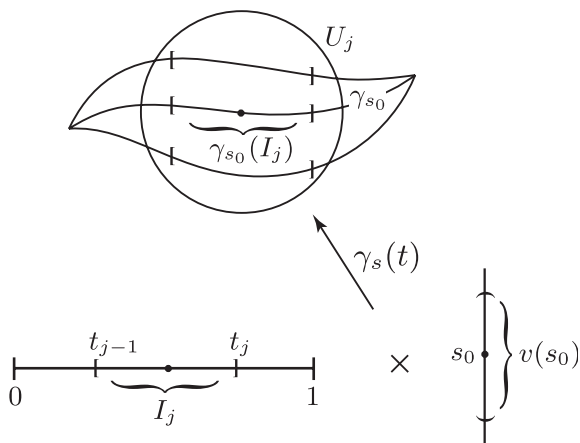


Рис. 22

В частности, из условия (2) и предложения 4.1 п. 4.4 вытекает, что $F_j \equiv F_{j-1}$ на $U_j \cap U_{j-1}$. Кроме того, в силу равномерной непрерывности $\gamma(s, t)$ на $I \times I$ найдется окрестность $v \subset I$ точки s_0 такая, что $\gamma(v \times I_j) \subset U_j$ при всех j .

Рассмотрим функцию $\Phi_s : I \rightarrow \mathbb{C}$ переменного t , зависящую от $s \in v$ как от параметра, полагая:

$$\Phi_s := F_j \circ \gamma_s \quad \text{на } I_j \quad \text{при } j = 1, \dots, n.$$

Тогда при каждом $s \in v$ функция Φ_s непрерывна на I и совпадает в окрестности каждой точки $t_0 \in I$ с $F(\gamma_s(t))$ для некоторой первообразной F функции f в окрестности точки $\gamma(t_0)$ (напомним, что $F_j \equiv F_{j-1}$ на $U_j \cap U_{j-1}$!). Тем самым, Φ_s является первообразной функции f вдоль пути γ_s .

По формуле Ньютона–Лейбница (или по самому определению $\int_{\gamma_s} f dz$ для непрерывных путей γ_s) имеем

$$J(s) := \int_{\gamma_s} f dz = \Phi_s(1) - \Phi_s(0).$$

Докажем, что эта функция не зависит от $s \in v$, откуда будет вытекать утверждение теоремы.

Рассмотрим отдельно случаи путей с общими концами и замкнутых путей.

1. Если γ_0 и γ_1 гомотопны как пути с общими концами (так что $\gamma_s(0) = a$ и $\gamma_s(1) = b$ для всех $s \in I$), то числа

$$\Phi_s(0) = F_1(\gamma_s(0)) = F_1(a) \quad \text{и} \quad \Phi_s(1) = F_n(\gamma_s(1)) = F_n(b)$$

не зависят от $s \in v$ (см. рис. 23). Следовательно, их разность $J(s)$ принимает одно и то же значение для всех $s \in v$.

2. Если γ_0 и γ_1 гомотопны как замкнутые пути (так что $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ для всех $s \in I$), то (не зависящие от s) функции F_1 и F_n как две первообразные функции f в окрестности $U_1 \cap U_n$ точки $z_s := \gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ (см. рис. 24) отличаются на (не зависящую от s) константу:

$$F_n(z) - F_1(z) = C \quad \text{для всех } z \in U_1 \cap U_n.$$

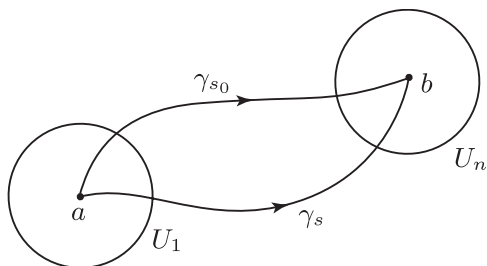


Рис. 23

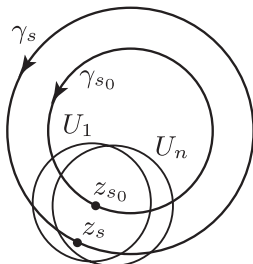


Рис. 24

Поэтому

$$J(s) = F_n(\gamma_s(1)) - F_1(\gamma_s(0)) = F_n(z_s) - F_1(z_s) = C$$

принимает одно и то же значение для всех $s \in v$. ■

Отметим два важных следствия из доказанной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Если функция f голоморфна в области D и путь $\gamma: I \rightarrow D$ гомотопен нулю в этой области, то

$$\int_{\gamma} f dz = 0.$$

В частности, в односвязной области D интеграл от функции $f \in \mathcal{O}(D)$ по любому замкнутому пути $\gamma: I \rightarrow D$ равен нулю.

Доказательство вытекает из теоремы о гомотопии, поскольку интеграл от функции f по постоянному пути $\gamma(t) \equiv z_0$ равен нулю.

ЗАДАЧА. Пользуясь этим следствием и примером 4.1 из п. 4.1, покажите, что при $0 \leq \alpha < r < \beta \leq \infty$ окружность $|z| = r$ не гомотопна нулю в области $D = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < |z| < \beta\}$. Тем самым, эта область не односвязна.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область. Тогда всякая функция f , голоморфная в D , имеет в этой области первообразную.

Для случая, когда область D есть круг, это утверждение было установлено ранее в п. 4.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку $a \in D$. Для каждой точки $z \in D$ выберем кусочно гладкий (или даже просто непрерывный) путь $\gamma: I \rightarrow D$, соединяющий a с z , и положим

$$F(z) := \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

Значение $F(z)$ не зависит от выбора γ . Действительно, если γ_1, γ_2 — два пути указанного вида (см. рис. 25), то интеграл от f по замкнутому пути $\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}$ равен нулю по предыдущему следствию, т.е.

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_2} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

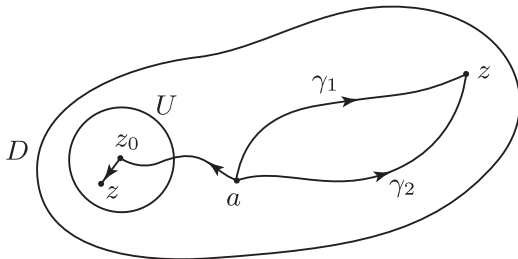


Рис. 25

В частности, если $z_0 \in D$ — произвольная точка в D и U — произвольный круг с центром z_0 , содержащийся в D (см. рис. 25), то для $z \in U$ функцию $F(z)$ можно будет записать в виде

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta,$$

где интеграл берется по отрезку от z_0 до z . По предложению 4.2 из п. 4.4 получаем, что F дифференцируема в U и

$$F'(z) = f(z) \quad \text{для всех } z \in U.$$

В силу произвольности z_0 заключаем отсюда, что F есть первообразная функции f в области D . ■

5.2. Теорема Коши для многосвязной области. Как уже отмечалось, в односвязной области может нарушаться как теорема о существовании первообразной, так и теорема об обращении в нуль интеграла по замкнутому контуру. Тем не менее, теорема Коши все же допускает обобщение на некоторые односвязные области.

Напомним (см. п. 1.4), что ограниченная область $D \in \mathbb{C}$ называется областью с простой границей, если ее граница ∂D есть объединение конечного числа непересекающихся кусочно гладких замкнутых жордановых кривых $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, где γ_0 обозначает внешнюю границу D , а $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — внутренние компоненты ∂D .

ТЕОРЕМА КОШИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ. Пусть $D \in \mathbb{C}$ — область с простой границей и функция f голоморфна в некоторой области $G \supset \bar{D}$. Тогда

$$\int_{\partial D} f dz = \int_{\gamma_0} f dz - \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f dz = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое из доказываемых равенств

$$\int_{\partial D} f dz = \int_{\gamma_0} f dz - \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f dz$$

есть просто определение интеграла

$$\int_{\partial D} f dz$$

в соответствии с нашим соглашением об ориентации ∂D , принятым в п. 1.4. Таким образом, содержательная часть утверждения теоремы заключается в равенстве

$$\int_{\partial D} f dz = 0.$$

Дадим идею его доказательства. Проведем в области D конечное число разрезов $\lambda_1^\pm, \dots, \lambda_n^\pm$, связывающих компоненты границы $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ между собой, так, чтобы замкнутая кривая Γ , составленная из отрезков границы ∂D и путей λ_j^\pm , как указано на рис. 26, была гомотопна нулю в области G .

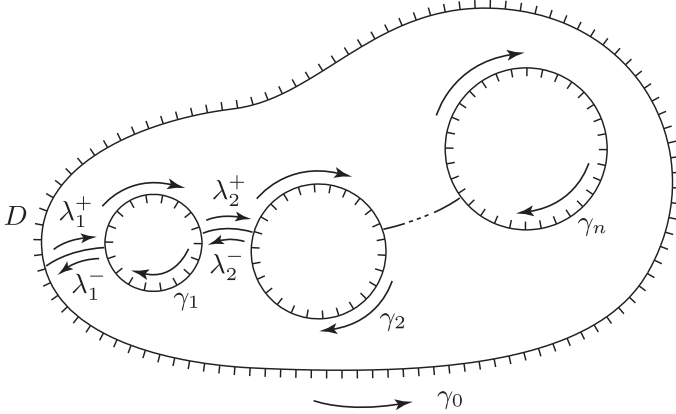


Рис. 26

Тогда по теореме Коши (точнее, по ее следствию 5.1) будем иметь

$$0 = \int_{\Gamma} f dz = \int_{\partial D} f dz + \sum_{j=1}^n \int_{\lambda_j^+} f dz + \sum_{j=1}^n \int_{\lambda_j^-} f dz = \int_{\partial D} f dz,$$

так как интегралы по λ_j^+ и λ_j^- в сумме дают нуль. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Чтобы довести приведенное выше рассуждение до строгого доказательства, необходимо уточнить, как проводить разрезы $\lambda_1^\pm, \dots, \lambda_n^\pm$ так, чтобы кривая Γ была гомотопна нулю в G . Это делается на основе следующих топологических утверждений, которые мы приводим без доказательства.

А) Если $D \subset \mathbb{C}$ — область с простой границей, причем ее граница $\partial D = \gamma_0$ состоит *только из одной* связной компоненты, то кривая ∂D гомотопна нулю в любой области $G \supset \overline{D}$.

В) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область с простой границей. Тогда для любых двух различных точек $z_0, z_1 \in \partial D$ существует соединяющий их жорданов путь $\lambda: I \rightarrow \mathbb{C}$, лежащий в D за исключением концов, т.е. $\lambda(0) = z_0$, $\lambda(1) = z_1$ и $\lambda(t) \in D$ при $0 < t < 1$. При этом

если точки z_0, z_1 принадлежат *разным* связным компонентам ∂D , то открытое множество $D \setminus \lambda(I)$ является связным, т.е. $D \setminus \lambda(I)$ есть снова область с простой границей. Более того, справедлив и “параметрический” аналог этого утверждения. А именно вместе с путем λ указанного вида найдется целая “лента”, заметаемая путями такого же типа. Точнее, существует гладкое вложение $\Lambda: I \times I \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что

- (а) $\Lambda(1/2, t) = \lambda(t)$ при всех $t \in I$;
- (б) $\Lambda(s, 0), \Lambda(s, 1) \in \partial D$ для всех $s \in I$;
- (с) $\Lambda(s, t) \in D$ при всех $s \in I, 0 < t < 1$.

При этом для каждого $s > 0$ множество $D \setminus \Lambda([-s, s] \times I)$ является областью с простой границей.

Приняв на веру приведенные утверждения А) и В), можно закончить доказательство теоремы следующим образом. Для произвольных точек $z_0 \in \gamma_0, z_1 \in \gamma_1, \dots, z_n \in \gamma_n$, пользуясь утверждением В), найдем по индукции непересекающиеся жордановы пути $\lambda_j, j = 1, \dots, n$, соединяющие z_{j-1} с z_j , каждый из которых допускает расширение до “ленты” $\Lambda_j: I \times I \rightarrow \mathbb{C}$ с указанными в утверждении В) свойствами. Тогда при любом $s > 0$ множество

$$D_s := D \setminus \bigcup_{j=1}^n \Lambda_j([-s, s] \times I)$$

есть область с простой границей, граница которой $\Gamma_s := \partial D_s$ связна, так что кривая Γ_s гомотопна нулю в G по утверждению А). Но совокупность кривых $\Gamma_s, 0 \leq s \leq 1$, задает (непрерывную) гомотопию кривой Γ_1 в кривую Γ , фигурирующую в доказательстве теоремы. Поэтому Γ также гомотопна нулю в G , что завершает доказательство теоремы Коши для многосвязной области.

Заметим еще, что утверждения А), В) достаточно проверить для областей D простого вида, а именно для неконцентрических колец (т.е. для круга, из которого удален круг меньшего радиуса). Пользуясь этим частным случаем теоремы Коши, можно доказать интегральную формулу Коши для круга (см. следующий пункт), а из нее, в свою очередь, вытекает бесконечная дифференцируемость голоморфных функций (см. задачу в п. 6.7). Тогда теорема Коши для многосвязной области будет следовать из формулы Стокса, как указано в начале п. 4.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Теорема Коши остается верной, если требование голоморфности f в объемлющей области $G \supset \bar{D}$ ослабить

до требования голоморфности f в области D и ее непрерывности в замыкании \overline{D} . Схема доказательства в этом случае такова: надо найти последовательность областей $D_1 \Subset D_2 \Subset \dots \Subset D$ с простыми границами такую, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$, и проверить, пользуясь непрерывностью f в \overline{D} , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial D_n} f dz = \int_{\partial D} f dz.$$

Так как $\int_{\partial D_n} f dz = 0$ в силу доказанной теоремы, отсюда будет следовать, что и $\int_{\partial D} f dz = 0$.

5.3. Интегральная формула Коши.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ. Пусть $D \Subset \mathbb{C}$ — область с простой границей и функция f голоморфна в некоторой области $G \supset \overline{D}$. Тогда для всех $z \in D$ справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Интеграл в правой части этой формулы называется *интегралом Коши*, а функция $\frac{1}{\zeta - z}$ — *ядром Коши*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку $z \in D$ и рассмотрим круг (см. рис. 27)

$$U_r := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < r\}.$$

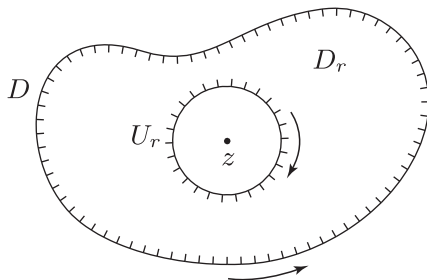


Рис. 27

Тогда $\overline{U}_r \subset D$ при достаточно малых $r > 0$. Применим теорему Коши из п. 5.2 к области $D_r := D \setminus \overline{U}_r$ и функции

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

голоморфной в замыкании этой области. Получим

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (5.1)$$

В частности, интеграл в правой части не зависит от r . Покажем, что он равен $2\pi i f(z)$. Имеем

$$2\pi i f(z) - \int_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial U_r} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (5.2)$$

где мы воспользовались равенством

$$\int_{\partial U_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$$

(см. пример 4.1 из п. 4.1). Покажем, что правая часть (5.2) равна нулю. Действительно, из непрерывности функции $f(\zeta)$ в точке z и стандартной оценки интеграла (свойство 5° из п. 4.2) следует, что правая часть (5.2) может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малом r , поскольку

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial U_r} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| &\leq \max_{\zeta \in \partial U_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{r} \cdot 2\pi r \\ &\leq 2\pi \max_{\zeta \in \overline{U}_r} |f(\zeta) - f(z)|. \end{aligned}$$

С другой стороны, как было отмечено выше, правая часть (5.2) не зависит от r , поэтому она должна быть равна нулю. Следовательно, левая часть (5.1) равна $2\pi i f(z)$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Если в условиях доказанной теоремы точка z лежит вне области D , т.е. $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

по теореме из п. 5.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Интегральная формула Коши восстанавливает функцию, голоморфную в замыкании области, по ее значению на границе этой области. В частности, голоморфная функция полностью определяется своими значениями на границе.

Отметим один часто используемый частный случай интегральной формулы Коши.

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ. Значение функции f , голоморфной в области D , в произвольной точке $a \in D$ равно среднему от этой функции по любой окружности с центром в точке a , ограничивающей круг $U_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$, компактно принадлежащий D :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По интегральной формуле Коши для круга $U_r(a) \Subset D$ имеем

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a}.$$

Пользуясь в этом интеграле параметризацией

$$\zeta = a + re^{i\theta}, \quad d\zeta = ire^{i\theta} d\theta,$$

получаем требуемую формулу. ■

ЗАДАЧИ. (1) Пусть функция f голоморфна в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 + \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Покажите, что для $0 \leq r < 1$

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \frac{\max_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|}{1 - r}.$$

Указание: запишите $f(z)$ по формуле Коши для круга $\{z \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ и оцените интеграл, пользуясь свойством 5° из п. 4.2.

(2) В условиях задачи (1) покажите, что

$$\max_{|z| \leq 1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

Указание: запишите неравенство (1) для $f(z)^n$, извлеките корень n -й степени и устремите $n \rightarrow \infty$.

(3) Пусть последовательность полиномов $P_n(z)$ сходится равномерно на окружности $\{|z| = 1\}$. Докажите, что она сходится равномерно на замкнутом единичном круге $\{|z| \leq 1\}$.

Указание: воспользуйтесь критерием Коши равномерной сходимости и результатом задачи (2).

Лекция 6. Ряды Тейлора

6.1. Напоминание. Напомним некоторые, необходимые нам, определения и утверждения из теории рядов применительно к комплексной ситуации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, составленный из комплексных чисел, *сходится* к $s \in \mathbb{C}$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| s - \sum_{j=1}^n a_j \right| = 0.$$

(2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, составленный из комплекснозначных функций $f_n: K \rightarrow \mathbb{C}$, определенных на множестве $K \subset \overline{\mathbb{C}}$, *сходится* к функции $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ *равномерно на K* , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=1}^n f_j \right\|_K = 0, \quad \text{где } \|\varphi\|_K := \sup_{z \in K} |\varphi(z)|.$$

Так же как в вещественной ситуации, легко доказываются следующие свойства равномерно сходящихся рядов.

1°. *Интегрирование равномерно сходящегося ряда.* Пусть $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ — кусочно гладкий путь, функции $f_n: \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывны и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на $\gamma(I)$. Тогда его сумма $f(z)$ тоже непрерывна на $\gamma(I)$ и

$$\int_{\gamma} f dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n dz.$$

2°. *Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.* Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, составленный из комплекснозначных функций $f_n: K \rightarrow \mathbb{C}$, которые заданы на компактном множестве $K \subset \overline{\mathbb{C}}$. Если этот ряд мажорируется сходящимся числовым рядом, т.е.

$$\|f_n\|_K \leq c_n$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на K .

6.2. Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора.

ТЕОРЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$ и $U_R(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ — круг радиуса $R > 0$ с центром в точке $a \in D$, содержащийся в D . Введем обозначение

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < r < R.$$

Числа c_n не зависят от r и называются коэффициентами Тейлора функции f в точке a . Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

называется рядом Тейлора функции f с центром в точке a . Он сходится для всех $z \in U_R(a)$ и его сумма равна $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad \text{при } |z - a| < R. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Независимость c_n от выбора r вытекает из теоремы Коши о гомотопии, поскольку любые две окружности

$$\{|\zeta - a| = r_1\} \quad \text{и} \quad \{|\zeta - a| = r_2\} \quad \text{с} \quad 0 < r_1 < r_2 < R$$

гомотопны в D как замкнутые пути.

Чтобы доказать сходимость ряда Тейлора и равенство (6.1), фиксируем точку $z \in U_R(a)$ и число $0 < r < R$, удовлетворяющее $|z - a| < r < R$. По интегральной формуле Коши (п. 5.3) имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Пользуясь тем, что $|z - a| < r = |\zeta - a|$ для всех $\zeta \in \partial U_r(a)$ (см. рис. 28), разложим подынтегральное выражение в геометрическую прогрессию:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}. \quad (6.2)$$

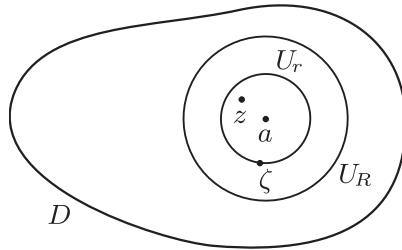


Рис. 28

Модуль n -го члена этого ряда не превосходит

$$\left| \frac{(z-a)^n f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M(r)}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n, \quad \text{где } M(r) := \max_{|\zeta-a|=r} |f(\zeta)|.$$

Следовательно, по свойству 2° из п. 6.1 этот ряд сходится равномерно по $\zeta \in \partial U_r(a)$. Поэтому по свойству 1° из п. 6.1 равенство (6.2) можно почленно проинтегрировать по $\partial U_r(a)$. Поделив обе части полученного равенства на $2\pi i$, получаем в точности (6.1). ■

6.3. Неравенства Коши.

НЕРАВЕНСТВА КОШИ. В условиях предыдущей теоремы при $0 < r < R$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливы неравенства

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad \text{где } M(r) := \max_{|\zeta-a|=r} |f(\zeta)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим интеграл, выражающий c_n , пользуясь свойством 5° из п. 4.2:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}. \quad \blacksquare$$

6.4. Теорема Лиувилля.

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ. Пусть f голоморфна во всей комплексной плоскости \mathbb{C} и существует $M > 0$ такое, что

$$|f(z)| \leq M \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}.$$

Тогда $f(z) \equiv \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через c_n коэффициенты Тейлора функции f в точке $a = 0$. По теореме 6.2 имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

для всех $z \in \mathbb{C}$. Согласно неравенствам Коши

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

для всех $r > 0$ и $n = 0, 1, 2, \dots$. Устремляя $r \rightarrow \infty$, получаем, что $c_n = 0$ при $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, $f(z) = c_0 \equiv \text{const}$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема Лиувилля гласит, что на всей плоскости \mathbb{C} нет ограниченных голоморфных функций, кроме констант. Поскольку всякая непрерывная функция на компакте ограничена, отсюда вытекает, что на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ единственными голоморфными функциями являются константы.

ЗАДАЧА. Покажите, что всю плоскость \mathbb{C} нельзя конформно отображить на единичный круг.

6.5. Множество точек сходимости степенного ряда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\{b_n\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n.$$

Число

$$R := \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n} \right\}^{-1} \quad (6.3)$$

(которое может оказаться равным 0 или $+\infty$) называется *радиусом сходимости* этого ряда, а круг

$$U_R(a) = \{z \in \mathbb{C}: |z - a| < R\}$$

называется *кругом сходимости* указанного ряда. Формула (6.3) для радиуса сходимости R называется *формулой Коши–Адамара*.

Приведенное определение мотивировано следующей теоремой.

ТЕОРЕМА. *Степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

сходится для каждого $z \in U_R(a)$, причем эта сходимость равномерна на каждом компактном подмножестве $K \subset U_R(a)$. Указанный ряд расходится для каждого $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(a)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $0 < R < \infty$ (случай $R = 0, \infty$ разберите самостоятельно). Тогда определение R эквивалентно тому, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|b_n|R^n)^{1/n} = 1. \quad (6.4)$$

Сходимость. Пусть $z \in U_R(a)$, т.е. $|z-a| < R$. Согласно (6.4) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$|b_n|R^n < (1+\varepsilon)^n \quad \text{при } n \geq n_0.$$

Выберем ε так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{|z-a|}{R}(1+\varepsilon) =: q < 1.$$

Тогда

$$|b_n(z-a)^n| < \frac{(1+\varepsilon)^n}{R^n} |z-a|^n = q^n \quad \text{при } n \geq n_0,$$

так что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

сходится по признаку Вейерштрасса.

Далее, для каждого компакта $K \subset U_R(a)$ имеем

$$\max_{z \in K} |z-a| =: r < R$$

(чтобы доказать это неравенство, достаточно выбрать конечное подпокрытие из покрытия компакта K кругами $U_\rho(a)$, $0 < \rho < R$). Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{r}{R}(1+\varepsilon) =: q < 1.$$

По предыдущему неравенству имеем

$$|b_n(z - a)^n| < q^n \quad \text{при всех } z \in K \text{ и } n \geq n_0.$$

Следовательно, наш ряд сходится равномерно на K по свойству 2° из п. 6.1.

Расходимость. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(a)}$, т.е. $|z - a| > R$. Согласно (6.4) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $n_k \rightarrow \infty$ такая, что

$$|b_n|R^n > (1 - \varepsilon)^n \quad \text{при всех } n = n_k.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{|z - a|}{R}(1 - \varepsilon) =: q > 1.$$

Тогда при всех $n = n_k$ будем иметь

$$|b_n(z - a)^n| > \frac{(1 - \varepsilon)^n}{R^n} |z - a|^n = q^n \rightarrow \infty,$$

откуда следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - a)^n$$

расходится, так как его общий член не стремится к нулю. ■

СЛЕДСТВИЕ (единственность разложения в степенной ряд). Если функция f голоморфна в круге $\{z : |z - a| < r\}$ и задается в нем сходящимся степенным рядом:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - a)^n,$$

то этот ряд совпадает с рядом Тейлора функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме круг $U := \{|z - a| < r\}$ содержится в круге сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - a)^n,$$

тем самым, этот ряд сходится равномерно на компактах в U . Поэтому при каждом фиксированном $k = 0, 1, 2, \dots$ и произвольном $\rho \in (0, r)$ ряд

$$\frac{1}{(z-a)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n = \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}$$

сходится равномерно на окружности $\{|z-a| = \rho\}$. Проинтегрировав его почленно по $\{|z-a| = \rho\}$, получим равенство

$$2\pi i b_k = 2\pi i c_k,$$

где c_k есть k -й коэффициент Тейлора функции f . ■

ПРИМЕРЫ. 1°. Ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (nz)^n$$

имеют радиусы сходимости соответственно $R = \infty, 1, 0$ и круги сходимости $U_R(0) = \mathbb{C}, \{|z| < 1\}, \emptyset$.

2°. Ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

имеют один и тот же круг сходимости (а именно, единичный круг), но *множества точек сходимости* у них различны. А именно, первый ряд расходится во всех точках единичной окружности (так как его общий член не стремится к нулю), второй ряд расходится в точке $z = 1$ (гармонический ряд), но сходится в точке $z = -1$ (ряд Лейбница), а третий ряд сходится всюду на единичной окружности (и даже равномерно на замкнутом единичном круге), как следует из оценки

$$\left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{при } |z| \leq 1.$$

Задачи. (1) Покажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

сходится во всех точках единичной окружности, кроме точки $z = 1$.

(2) Покажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{1n}}$$

сходится равномерно на замкнутом единичном круге вместе со всеми рядами, полученными из него почленным дифференцированием.

(3) Пусть ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

сходится при $|z - a| < R$. Докажите, что при всех $r \in [0, R)$ интегральное среднее от квадрата модуля $f(z)$ по окружности радиуса r равно сумме квадратов модулей членов ряда на этой окружности:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}.$$

Указание: запишите $|f(z)|^2$ в виде

$$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \overline{c_l} (\overline{z - a})^l \right),$$

подставьте $z - a = re^{i\theta}$, перемножьте ряды и проинтегрируйте почленно по $\theta \in [0, 2\pi]$. Интегралы от членов ряда с $k \neq l$ будут равны нулю.

(4) Покажите, что в условиях предыдущей задачи справедливо неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2, \quad \text{где } M(r) := \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

(5) Покажите, что если хотя бы одно из неравенств Коши (п. 6.3) обращается в равенство (т.е. если существуют $n \in \mathbb{N}$ и $r \in [0, R)$ такие, что $|c_n| = M(r)/r^n$), то $f(z) = C(z - a)^n$ для некоторой константы $C \in \mathbb{C}$. Покажите, что сразу два неравенства Коши могут обращаться в равенство только для $f(z) \equiv 0$.

6.6. Голоморфность суммы степенного ряда.

ТЕОРЕМА. Сумма любого степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n$$

голоморфна в его круге сходимости. При этом производная $f'(z)$ является суммой степенного ряда, полученного почленным дифференцированием ряда для $f(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим радиус сходимости ряда, задающего f , через R и будем считать, что $R > 0$ (иначе круг сходимости $U_R(a)$ пуст и доказывать нечего). Рассмотрим ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n(z-a)^{n-1},$$

полученный почленным дифференцированием ряда для $f(z)$. Его радиус сходимости тоже равен R , так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1.$$

Следовательно, по теореме из п. 6.5 этот ряд сходится в круге $U_R(a)$, причем сходимость равномерна на компактах из $U_R(a)$. Тем самым, функция g удовлетворяет обоим условиям теоремы о существовании первообразной (предложение 2 из п. 4.4), а именно:

- (1) функция g непрерывна в $U_R(a)$;
- (2) для каждого треугольника $\Delta \Subset U_R(a)$

$$\int_{\partial\Delta} g(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \int_{\partial\Delta} (z-a)^{n-1} dz = 0$$

(ряд можно почленно интегрировать в силу свойства 1° из п. 6.1, а равенство $\int_{\partial\Delta} (z-a)^{n-1} dz = 0$ следует из теоремы Коши, см. следствие 1 из п. 5.1 или пример 2 из п. 4.1).

По теореме о существовании первообразной функция

$$f_0(z) = \int_a^z g(\zeta) d\zeta$$

(где интеграл берется по отрезку от a до z) голоморфна в U и удовлетворяет условию $f'_0 = g$ в U . Почленное интегрирование ряда для $g(\zeta)$ по $[a, z]$ дает

$$f_0(z) = f(z) - b_0.$$

Следовательно, функция f голоморфна в U и $f' = g$, что и требовалось доказать. ■

ЗАДАЧА. Найдите радиус сходимости ряда Тейлора функции

$$f(z) = \frac{z^2 \sin(1/z)}{z^2 + 1}$$

с центром в точке $z = 1$.

6.7. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций.

ТЕОРЕМА. *Функция f , голоморфная в произвольной области $D \subset \mathbb{C}$, имеет в D производные всех порядков, которые также голоморфны в D . При этом ряд Тейлора n -й производной $f^{(n)}(z)$ с центром в произвольной точке $a \in D$ получается n -кратным дифференцированием ряда Тейлора для $f(z)$ с центром в a .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим круг сходимости $U_R(a)$ ряда Тейлора для $f(z)$ с центром в точке a . По предыдущей теореме $f'(z)$ представляется в круге $U_R(a)$ степенным рядом, полученным почленным дифференцированием ряда Тейлора для $f(z)$. Значит, функция f' голоморфна в круге $U_R(a)$ (снова по предыдущей теореме), а представляющий ее ряд есть ряд Тейлора этой функции с центром в a (по теореме единственности из п. 6.5). Повторяя данное рассуждение для f' , получим аналогичное утверждение для f'' и т.д. В силу произвольности точки $a \in D$ функция f имеет производные всех порядков всюду в D . ■

ЗАДАЧА. Проследив еще раз все рассуждения от п. 5.3 до этого места, покажите, что для доказательства бесконечной дифференцируемости голоморфных функций достаточно знать лишь частный случай теоремы Коши из п. 5.2 для неконцентрического кольца $D = U_2 \setminus U_1$, где $U_1 \Subset U_2$ — открытые круги. Дайте полное прямое доказательство этого частного случая и выведите из него общий случай теоремы Коши для многосвязной области, пользуясь формулой Стокса в соответствии с замечанием 5.1 из п. 5.2.

6.8. Коэффициенты ряда Тейлора.

ТЕОРЕМА. *Пусть функция*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

голоморфна в круге $U_R(a) = \{|z-a| < R\}$. Тогда ее коэффициенты Тейлора в точке a вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь теоремой из п. 6.7, продифференцируем n раз ряд для $f(z)$ и положим $z = a$. ■

6.9. Интегральная формула Коши для производных.

ТЕОРЕМА. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область с простой границей и функция f голоморфна в окрестности замыкания \bar{D} области D . Тогда для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ и всех $z \in D$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точку $z \in D$ и выберем $r > 0$ так, чтобы круг $U_r = U_r(z) \Subset D$ с центром в z компактно принадлежал D . Для коэффициентов ряда Тейлора функции f в круге U_r нами получены две различных формулы (см. пп. 6.2, 6.8):

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad \text{и} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}.$$

Приравнивая их правые части, получим, что

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

По теореме Коши для многосвязной области (см. п. 5.2) интеграл по ∂U_r в этой формуле можно заменить интегралом по ∂D , что и дает требуемое утверждение. ■

6.10. Теорема Морера.

ТЕОРЕМА МОРЕРА. Если функция f непрерывна в области D и интеграл от f по границе любого треугольника $\Delta \Subset D$ равен нулю, то f голоморфна в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать голоморфность f в произвольном круге $U \in D$. Но по теореме о существовании первообразной (предложение 4.2 из п. 4.4) f имеет в U первообразную F . Поскольку производная голоморфной функции F сама голоморфна (см. п. 6.7), получаем отсюда голоморфность f в круге U . ■

6.11. Три эквивалентных определения голоморфной функции.

ТЕОРЕМА. Каждое из следующих условий эквивалентно голоморфности функции f в точке $a \in \mathbb{C}$:

- (1) функция f является \mathbb{C} -дифференцируемой в некоторой окрестности U точки a ;
- (2) функция f аналитична в точке a , т.е. разлагается в степенной ряд с центром в точке a , сходящийся в некоторой окрестности U точки a ;
- (3) функция f непрерывна в некоторой окрестности U точки a и интеграл от f по границе любого треугольника $\Delta \in U$ равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

- (1) \Rightarrow (2): теорема о разложении в ряд Тейлора (п. 6.2).
 (2) \Rightarrow (1): теорема о голоморфности суммы степенного ряда (п. 6.6).
 (1) \Rightarrow (3): интегральная теорема Коши в любой из форм пп. 5.1, 5.2; достаточно даже леммы Гурса (п. 4.3).
 (3) \Rightarrow (1): теорема Морера (п. 6.10). □

6.12. Разложение голоморфной функции в окрестности нуля.

ТЕОРЕМА. Пусть функция f голоморфна в точке $a \in \mathbb{C}$ и $f(a) = 0$, но f не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки a . Тогда в некоторой окрестности U точки a функция f представляется в виде

$$f(z) = (z - a)^n g(z),$$

где n — некоторое натуральное число, функция g голоморфна в окрестности U и отлична от нуля всюду в U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция f представляется своим рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

в круге сходимости $U_R(a)$ (отметим, что $c_0 = f(a) = 0$ по условию). Положим

$$n := \min\{m \geq 1 : c_m \neq 0\}$$

(это определение корректно, так как если $c_m = 0$ для всех $m \geq 1$, то $f(z) \equiv 0$ в $U_R(a)$ вопреки условию). Тем самым, ряд Тейлора функции f имеет вид

$$f(z) = c_n (z - a)^n + c_{n+1} (z - a)^{n+1} + \dots$$

Рассмотрим ряд

$$g(z) := c_n + c_{n+1}(z - a) + \dots$$

Он имеет тот же радиус сходимости, что и ряд для f , тем самым, его сумма $g(z)$ голоморфна в круге $U_R(a)$. Кроме того,

$$f(z) = (z - a)^n g(z) \quad \text{при } z \in U_R(a).$$

Поскольку функция g непрерывна в $U_R(a)$ и $g(a) = c_n \neq 0$, то найдется окрестность $U \subset U_R(a)$ точки a , в которой $g(z) \neq 0$ при $z \in U$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число

$$n = \min\{m \geq 1 : c_m \neq 0\} = \min\{m \geq 1 : f^{(m)}(a) \neq 0\}$$

из доказанной теоремы называется *порядком нуля* голоморфной функции f в точке a . Иначе говоря, порядок нуля f в точке a — это номер n первой отличной от нуля производной $f^{(n)}(a)$ или, эквивалентно, это единственное натуральное число n такое, что в некоторой окрестности U точки a

$$f(z) = (z - a)^n g(z)$$

для некоторой $g \in \mathcal{O}(U)$ с $g(a) \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ (изолированность нулей голоморфной функции). Если функция f голоморфна в области D и обращается в нуль в точке $a \in D$, то либо $f \equiv 0$ в окрестности a , либо существует окрестность $U \subset D$ точки a такая, что $f(z) \neq 0$ для всех $z \in U \setminus \{a\}$.

6.13. Теорема единственности.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ. Пусть D — произвольная область в \mathbb{C} и $E \subset D$ — ее подмножество, имеющее предельную точку a в D (последнее означает, что пересечение $E \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ непусто для любого $\varepsilon > 0$). Если функции f_1, f_2 , голоморфные в области D , совпадают во всех точках множества E , т.е.

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \text{для всех } z \in E,$$

то

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \text{для всех } z \in D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через A множество всех точек $z \in D$ таких, что $f_1 \equiv f_2$ в окрестности точки z . Это множество

- (а) открыто (очевидно из определения);
- (б) замкнуто (если $z_0 \in D$ — предельная точка для A , то z_0 — неизолированный нуль функции $f_1 - f_2$, откуда $z_0 \in A$ по следствию из п. 6.12);
- (с) непусто (предельная точка a множества E есть неизолированный нуль функции $f_1 - f_2$, откуда $a \in A$ согласно тому же следствию из п. 6.12).

В силу связности D множество A должно совпадать с D (см. теорему об открыто-замкнутом подмножестве из п. 1.4), откуда следует утверждение теоремы. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Располагая теоремой единственности, можно усилить следствие из п. 6.12 следующим образом.

Пусть функция f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$ и отлична от тождественного нуля, а точка $a \in D$ является ее нулем: $f(a) = 0$. Тогда существует окрестность $U \subset D$ точки a такая, что

$$f(z) \neq 0 \quad \text{для всех } z \in U \setminus \{a\}.$$

Таким образом, множество нулей голоморфной в области D функции либо совпадает с D , либо состоит из изолированных точек.

Задачи. (1) Пусть функция $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ равна нулю для всех вещественных z . Покажите, что она равна нулю и для всех комплексных z .

(2) Функции $f_1(z) = z^2 \sin(\pi/z)$ и $f_2(z) \equiv 0$ совпадают на множестве $E = \{1/n : n = 1, 2, \dots\}$, имеющем предельную точку $a = 0$. Тем не менее неверно, что $f_1 \equiv f_2$. Какое условие теоремы единственности не выполнено?

(3) Пусть D — произвольная область в \mathbb{C} и f — функция, голоморфная в D и отличная от тождественного нуля. Покажите, что f имеет в D не более счетного множества нулей.

(4) Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и для каждой точки $a \in \mathbb{C}$ хотя бы один коэффициент c_n ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

равен нулю. Покажите, что f — полином.

Указание: воспользуйтесь формулой из п. 6.8.

6.14. Теорема Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.

ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

составленный из функций f_n , $n = 1, 2, \dots$, голоморфных в области $D \subset \mathbb{C}$, сходится равномерно на компактах из D . Тогда его сумма $f(z)$ голоморфна в D и при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ имеет место разложение

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z),$$

где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ также сходится равномерно на компактах из D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Рассмотрим произвольный круг $U \Subset D$. Из равномерной сходимости ряда для f ясно, что функция f непрерывна в U и для всякого треугольника $\Delta \Subset U$ справедливо равенство

$$\int_{\partial\Delta} f dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial\Delta} f_n dz = 0$$

(последнее равенство вытекает из леммы Гурса, см. п. 4.3). По теореме Морера из п. 6.10 отсюда следует, что $f \in \mathcal{O}(U)$. В силу произвольности U получаем, что $f \in \mathcal{O}(D)$.

2°. Для каждого замкнутого круга $K \subset D$ найдется открытый круг V с тем же центром такой, что $K \subset V \Subset D$. Тогда для всех $k = 1, 2, \dots$ и всех $z \in K$ имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z). \end{aligned}$$

Первое и последнее из этих равенств имеют место по формуле Коши для производных (п. 6.9), а среднее вытекает из равномерной сходимости соответствующего ряда.

Докажем равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ на K . Положим

$$r_n(\zeta) := f(\zeta) - \sum_{j=1}^n f_j(\zeta)$$

и обозначим радиусы кругов K и V через r и R соответственно. Пользуясь опять формулой Коши для производных и оценивая интеграл по свойству 5° из п. 4.2, мы будем иметь для всех $z \in K$

$$\begin{aligned} \left| f^{(k)}(z) - \sum_{j=1}^n f_j^{(k)}(z) \right| \\ = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\partial V} \frac{r_n(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{\max_{\zeta \in \partial V} |r_n(\zeta)|}{(R - r)^{k+1}} \cdot 2\pi R. \end{aligned}$$

Это выражение не зависит от z и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

3°. Покажем теперь, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

сходится к $f^{(k)}(z)$ равномерно на произвольном компакте $K \subset D$. В силу компактности K существует конечный набор замкнутых кругов $K_1, \dots, K_N \subset D$ такой, что $K \subset \bigcup_{j=1}^N K_j$. По доказанному выше указанный ряд равномерно сходится к $f^{(k)}(z)$ на каждом круге K_j , а значит, и на всем компакте K . ■

6.15. Аппроксимация голоморфных функций полиномами. Как известно, всякую непрерывную вещественнозначную функцию $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ можно равномерно аппроксимировать полиномами с любой наперед заданной точностью. Иными словами, существует последовательность вещественнозначных полиномов $P_n(x)$ такая, что

$$\|f - P_n\|_{[0,1]} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Спрашивается, можно ли перенести это свойство на комплекснозначные функции $f(z)$, заданные на замкнутом круге $\{|z| \leq 1\}$? Из теоремы Вейерштрасса (п. 6.14) вытекает, что это, вообще говоря, невозможно — если существует последовательность полиномов $P_n(z)$, равномерно сходящаяся к функции $f(z)$ на круге $\{|z| \leq 1\}$, то эта функция обязана быть голоморфной на $\{|z| < 1\}$. С другой стороны, если $f \in \mathcal{O}(\{|z| < 1\})$, то найдется последовательность полиномов $P_n(z)$, сходящаяся к $f(z)$. А именно, в качестве таких полиномов можно взять частичные суммы ряда Тейлора функции f , которые сходятся к $f(z)$ равномерно на компактах из $\{|z| < 1\}$ по теоремам из пп. 6.2 и 6.5. Сохранится ли последнее утверждение, если заменить в нем круг $\{|z| < 1\}$ на произвольную область $D \subset \mathbb{C}$? Следующие задачи показывают, что, вообще говоря, нет.

Задачи. (1) Докажите, что не существует последовательности полиномов $P_n(z)$, которая сходилась бы к $f(z) = 1/z$ равномерно на компактах в кольце $\{1/2 < |z| < 2\}$.

(2) Пусть $0 \leq a < b$. Покажите, что функция $f \in \mathcal{O}(\{a < |z| < b\})$ является равномерным на компактах из $\{a < |z| < b\}$ пределом последовательности полиномов тогда и только тогда, когда $f(z)$ можно доопределить при $|z| \leq a$ так, чтобы получилась функция, голоморфная во всем круге $\{|z| < b\}$.

Указание: используйте задачу (3) из п. 5.3 и теорему Вейерштрасса из п. 6.14.

Однако в односвязных областях аппроксимация голоморфных функций полиномами всегда возможна, как показывает следующая теорема Рунге, которую мы приводим без доказательства.

ТЕОРЕМА РУНГЕ. *Если $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция f голоморфна в D , то существует последовательность полиномов $P_n(z)$, сходящаяся к $f(z)$ равномерно на компактах в D .*

Лекция 7. Ряды Лорана и особые точки

Ряды Тейлора, рассмотренные в предыдущей лекции, позволяют легко вывести основные свойства функций, голоморфных в круге, но плохо приспособлены для изучения особенностей таких функций. Удобным инструментом исследования изолированных особенностей голоморфных функций являются ряды Лорана, изучаемые в этой лекции.

7.1. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в кольце

$$V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$$

с центром в точке $a \in \mathbb{C}$ с $0 \leq r < R \leq +\infty$. Положим

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z} \quad \text{и } r < \rho < R.$$

Числа c_n не зависят от ρ и называются коэффициентами Лорана функции f в кольце V . Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

называемый рядом Лорана функции f в кольце V , сходится для всех $z \in D$ и его сумма равна $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad \text{при } r < |z - a| < R. \quad (7.1)$$

Часть ряда Лорана, задаваемая рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

называется *регулярной частью* ряда Лорана, а оставшаяся часть

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n$$

— его *главной частью*. Подчеркнем, что здесь и далее сходимость ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

означает по определению, что сходятся *по отдельности* ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n,$$

представляющие соответственно регулярную и главную части ряда Лорана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Независимость коэффициентов c_n от ρ вытекает из теоремы Коши, поскольку любые две окружности

$$\{|\zeta - a| = \rho_1\} \quad \text{и} \quad \{|\zeta - a| = \rho_2\} \quad \text{с} \quad r < \rho_1 < \rho_2 < R$$

гомотопны в V как замкнутые пути.

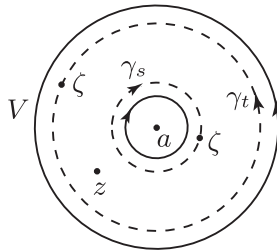


Рис. 29

Чтобы доказать равенство (7.1), фиксируем $z \in V$ и выберем $s, t \in (r, R)$ так, что $s < |z - a| < t$ (см. рис. 29). По формуле Коши (п. 5.3) для кольца $\{\zeta \in \mathbb{C} : s < |\zeta - a| < t\}$, ограниченного окружностями

$$\gamma_s := \{|\zeta - a| = s\} \quad \text{и} \quad \gamma_t := \{|\zeta - a| = t\},$$

имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} =: I_1 - I_2. \quad (7.2)$$

Пользуясь тем, что $|z - a| < |\zeta - a|$ для всех $\zeta \in \gamma_t$, разложим подынтегральное выражение в I_1 в геометрическую прогрессию:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Модуль n -го члена этого ряда не превосходит

$$\frac{M(t)}{t} \left(\frac{|z-a|}{t} \right)^n, \quad \text{где } M(t) := \max_{|\zeta-a|=t} |f(\zeta)|.$$

Следовательно, по свойству 2° из п. 6.1 этот ряд сходится равномерно по $\zeta \in \gamma_t$. Интегрируя его почленно по γ_t , получаем

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{где } c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad (7.3)$$

т.е. интеграл I_1 совпадает с регулярной частью ряда Лорана. Отметим, что первая часть доказательства проводится так же, как доказательство теоремы 6.2 о разложении голоморфной функции в степенной ряд.

Обратимся теперь к интегралу I_2 . Для $\zeta \in \gamma_s$ имеем $|\zeta - a| < |z - a|$, так что

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta-a}{z-a} - 1} = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^m}{(z - a)^{m+1}}.$$

Умножая этот ряд на $f(\zeta)$ и интегрируя почленно по γ_s , получаем, что

$$I_2 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - a)^{-(m+1)},$$

где коэффициент

$$b_m = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} (\zeta - a)^m f(\zeta) d\zeta$$

совпадает с $-c_{-(m+1)}$. Таким образом, интеграл I_2 равен взятой со знаком минус главной части ряда Лорана. Подставляя это выражение для I_2 и выражение для I_1 , даваемое формулой (7.3), в формулу (7.2), получим требуемую формулу (7.1). \blacksquare

7.2. Сходимость рядов по целым степеням $z - a$.

ТЕОРЕМА. Для произвольного набора $\{c_n : n \in \mathbb{Z}\}$ комплексных чисел положим

$$R := \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \right\}^{-1}, \quad r := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_{-n}|^{1/n}.$$

Тогда ряд Лорана

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

сходится абсолютно и равномерно на компактах в кольце $\{r < |z - a| < R\}$, причем его сумма $f(z)$ голоморфна в этом кольце и удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = c_n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z} \text{ и } r < \rho < R. \quad (7.4)$$

Если $|z - a| < r$, то главная часть ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n$$

расходится. Если же $|z - a| > R$, то расходится его регулярная часть

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Отметим, что из равенства (7.4) вытекает свойство единственности коэффициентов Лорана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения о сходимости и расходимости следуют из формулы Коши–Адамара (п. 6.5), примененной к степенным рядам

$$f_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

и

$$f_2(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n = \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} Z^m, \quad \text{где } Z := \frac{1}{z - a}.$$

Голоморфность $f(z)$ в кольце $r < |z - a| < R$ вытекает из того, что функция $f_1(z)$ голоморфна при $|z - a| < R$ в силу п. 6.6, а функция $f_2(z)$ голоморфна при $|z| < r^{-1}$, т.е. при $|z - a| > r$.

Чтобы доказать формулу (7.4), надо умножить равенство

$$f(\zeta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\zeta - a)^n$$

на $(\zeta - a)^{-(m+1)}$ и проинтегрировать почленно по окружности $|\zeta - a| = \rho$ (это законно в силу равномерной сходимости ряда). Согласно примеру 4.1 из п. 4.1 интегралы от всех членов ряда с $n \neq m$ равны нулю, а интеграл от члена с $n = m$ равен $2\pi i$, что и дает (7.4). ■

Задачи. (1) Пусть ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - a)^n$$

сходится при $|z - a| > 1$. Доопределим $f(z)$ в точке $z = \infty$, полагая $f(\infty) = 0$. Покажите, что функция $f(z)$ голоморфна в точке $z = \infty$.

(2) Пусть $u \in U$ — открытые круги с общим центром. Покажите, что всякая функция $f(z)$, голоморфная в кольце $V = U \setminus \bar{u}$, представляется как сумма функций, голоморфных внутри и снаружи кольца, т.е. для всех $z \in V$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где $f_1 \in \mathcal{O}(U)$, $f_2 \in \mathcal{O}(\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{u})$.

Указание: следуйте доказательству теоремы из п. 7.1.

(3) Покажите, что f_1, f_2 определяются по f однозначно с точностью до аддитивной константы, т.е. с точностью до замены $f_1(z), f_2(z)$ на $f_1(z) + C, f_2(z) - C$, где $C \in \mathbb{C}$ — некоторая константа.

Указание: используйте теорему Лиувилля из п. 6.4.

(4) Верны ли результаты задач (2), (3) для неконцентрического кольца (т.е. без предположения о том, что центры кругов u, U совпадают)?

7.3. Неравенства Коши для коэффициентов Лорана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть функция

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$$

голоморфна в кольце $\{r < |z - a| < R\}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{Z}$ и всех $\rho \in (r, R)$ справедливы неравенства

$$|c_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}, \quad \text{где } M(\rho) := \max_{|\zeta - a| = \rho} |f(\zeta)|.$$

Доказательство повторяет доказательство неравенств Коши из п. 6.3.

Задачи. (1) Предполагая, что функция $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$ голоморфна в кольце $\{r < |z - a| < R\}$, докажите тождество

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \rho^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + \rho e^{i\theta})|^2 d\theta$$

для $r < \rho < R$. Выведите отсюда следующее усиление неравенств Коши из п. 7.3

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \rho^{2n} \leq M(\rho)^2.$$

Указание: см. задачи (3), (4) из п. 6.5.

(2) Покажите, что если хотя бы одно из неравенств Коши (п. 7.3) для функции $f(z)$ обращается в равенство, то она равна $C(z - a)^n$ для некоторых $C \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.

7.4. Замечание о рядах Лорана и Фурье. Каждый сходящийся ряд Лорана можно рассматривать как ряд Фурье. Если, например, функция f голоморфна в кольце $\{1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то n -й коэффициент Лорана c_n функции f можно записать в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} f(\zeta) \zeta^{-(n+1)} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt.$$

Иначе говоря, он совпадает с n -м коэффициентом Фурье функции $\varphi(t) = f(e^{it})$ на отрезке $0 \leq t \leq 2\pi$. В частности, в силу теоремы из п. 7.2 отсюда вытекает, что ряд Фурье функции $f(e^{it})$ сходится к ней равномерно на отрезке $0 \leq t \leq 2\pi$.

Задачи. (1) Пользуясь теоремой Вейерштрасса (п. 6.14), покажите, что ряд Фурье функции $f(e^{it})$ сходится к ней равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$ вместе со всеми производными.

(2) Проверьте, что тождество в задаче (1) из п. 7.3 есть не что иное, как равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье функции $f(\rho e^{it})$ на отрезке $0 \leq t \leq 2\pi$.

Заметим, однако, что обратный переход от ряда Фурье к ряду Лорана возможен не всегда, точнее, не всякий ряд Фурье является рядом Лорана некоторой функции. Более подробно, для каждой функции $\varphi \in L^1(0, 2\pi)$ можно определить ее коэффициенты Фурье по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-int} dt.$$

Если функция φ является достаточно гладкой (например, класса $C^2(0, 2\pi)$), причем как сама φ , так и ее производные φ' и φ'' принимают одинаковые значения в точках 0 и 2π , то ряд Фурье этой функции

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

сходится к φ абсолютно и равномерно на $[0, 2\pi]$. Однако для сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

в каком-либо кольце $\{1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, необходимо, чтобы функция φ была вещественно аналитической (это вытекает из теоремы п. 7.2 и результатов лекции 6).

7.5. Изолированные особые точки. Определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $a \in \mathbb{C}$ называется *изолированной особой точкой* (однозначного характера) для функции $f(z)$, если f голоморфна в некоторой проколотой окрестности $V = \{0 < |z - a| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, точки a . Изолированная особая точка a функции f называется:

- (1) *устранимой*, если существует (конечный) предел

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C};$$

- (2) *полюсом*, если существует

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty;$$

- (3) *существенно особой точкой* во всех остальных ситуациях, т.е. когда не существует (ни конечного, ни бесконечного) предела $f(z)$ при $z \rightarrow a$.

ПРИМЕРЫ. Точка $a = 0$ является:

- (1) устранимой особой точкой для функции

$$f(z) = \frac{\sin z}{z};$$

- (2) полюсом для функции

$$f(z) = \frac{1}{z};$$

- (3) существенно особой точкой для функции

$$f(z) = e^{1/z}$$

(действительно, при $z = x \rightarrow 0$ предел справа равен $+\infty$, предел слева равен 0 , а при $z = iy \rightarrow 0$ функция $e^{-i/y} = \cos(1/y) - i \sin(1/y)$ вообще не имеет предела);

- (4) *неизолированной* особой точкой для функции

$$f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{z},$$

имеющей полюсы в точках $z_n = (\pi n)^{-1}$.

7.6. Описание устранимых особых точек.

ТЕОРЕМА. Для функции f , голоморфной в проколотой окрестности $V = \{0 < |z - a| < \varepsilon\}$ точки a , следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $z = a$ — устранимая особая точка;
- (2) $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $V' = \{0 < |z - a| < \varepsilon'\}$, $\varepsilon' > 0$, точки a ;
- (3) коэффициенты Лорана c_n функции f в проколотой окрестности $V = \{0 < |z - a| < \varepsilon\}$ удовлетворяют условию

$$c_n = 0 \quad \text{при } n < 0;$$

- (4) можно доопределить функцию $f(z)$ при $z = a$ таким образом, чтобы полученная функция f стала голоморфной в полной окрестности $U = \{|z - a| < \varepsilon\}$ точки a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) \Rightarrow (2). Очевидно.

(2) \Rightarrow (3). Если

$$|f(z)| \leq M \quad \text{при } 0 < |z - a| < \varepsilon',$$

то по неравенствам Коши (п. 7.3) имеем

$$|c_{-k}| \leq M \rho^k \quad \text{при всех } k = 1, 2, \dots \quad \text{и всех } \rho \in (0, \varepsilon').$$

Устремляя $\rho \rightarrow 0$, получаем, что $c_{-k} = 0$ при каждом $k = 1, 2, \dots$

(3) \Rightarrow (4). По условию имеем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad \text{при } 0 < |z - a| < \varepsilon.$$

Если положить $f(a) = c_0$, то это равенство будет верно и при $|z - a| < \varepsilon$. По теореме из п. 6.6 функция f голоморфна в окрестности $\{|z - a| < \varepsilon\}$.

(4) \Rightarrow (1). Очевидно. ■

Задача. Пусть $f \in \mathcal{O}(\{0 < |z - a| < \varepsilon\})$ и функция $|z - a|^{1/2} |f(z)|$ ограничена на $\{0 < |z - a| < \varepsilon\}$. Покажите, что a — устранимая особая точка для $f(z)$.

7.7. Описание полюсов.

ТЕОРЕМА. Точка a является полюсом функции f , голоморфной в проколотой окрестности $V = \{0 < |z - a| < \varepsilon\}$ этой точки, тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения f в окрестности V содержит лишь конечное (но ненулевое) число отличных от нуля членов. Иначе говоря, лорановское разложение f в окрестности V имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$, причем $c_{-N} \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. \Rightarrow . По определению полюса

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty,$$

так что $f(z) \neq 0$ при $0 < |z - a| < \varepsilon'$. Следовательно, функция

$$g(z) := \frac{1}{f(z)}$$

голоморфна в проколотой окрестности $V' = \{0 < |z - a| < \varepsilon'\}$. При этом по условию

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0.$$

По теореме из п. 7.6 функция g будет голоморфна в полной окрестности $U' = \{|z - a| < \varepsilon'\}$ точки a , если доопределить ее в этой точке, полагая $g(a) = 0$. Обозначим через N порядок нуля $g(z)$ при $z = a$ (см. п. 6.12). Тогда при $0 < |z - a| < \varepsilon'$ будем иметь

$$g(z) = (z - a)^N h(z),$$

где функция h голоморфна в окрестности $U' = \{|z - a| < \varepsilon'\}$ и $h(z) \neq 0$ при $0 < |z - a| < \varepsilon''$. Функция $1/h$ голоморфна в круге $U'' = \{|z - a| < \varepsilon''\}$ и, следовательно, по теореме из п. 6.2 разлагается там в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{h(z)} = b_0 + b_1(z - a) + \dots,$$

причем $b_0 = 1/h(a) \neq 0$. Умножая это разложение на $(z - a)^{-N}$, мы видим, что функция

$$f(z) = (z - a)^{-N} \cdot \frac{1}{h(z)}$$

имеет требуемый ряд Лорана в проколотой окрестности $\{0 < |z - a| < \varepsilon\}$.

\Leftarrow . По условию

$$f(z) = (z - a)^{-N} g(z),$$

где функция g голоморфна в окрестности $U = \{|z - a| < \varepsilon\}$ и $g(a) \neq 0$ в U . Следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$



ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Число N из этой теоремы, определяемое свойствами:

$$c_{-n} = 0 \quad \text{при } n > N, \quad \text{но } c_{-N} \neq 0,$$

называется *порядком полюса* функции $f(z)$ в точке $z = a$. Из доказательства ясно, что *функция $f(z)$ имеет полюс в точке a тогда и только тогда, когда функция $1/f(z)$ голоморфна и равна нулю в этой точке; при этом порядок полюса $f(z)$ в точке a совпадает с порядком нуля $1/f(z)$ в точке a .*

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Из описания устранимых особенностей и полюсов вытекает следующая характеристика существенно особых точек в терминах ряда Лорана: *функция*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

голоморфная в проколотой окрестности $V = \{0 < |z-a| < \varepsilon\}$ точки $z = a$, имеет существенную особенность в этой точке тогда и только тогда, когда найдется бесконечно много номеров $n \geq 1$ таких, что

$$c_{-n} \neq 0.$$

Задачи. (1) Пусть функции f , g имеют в точке $z = a$ полюсы порядков k , l соответственно. Какую особенность могут иметь в точке $z = a$ функции

$$f \pm g, \quad fg, \quad f/g?$$

(2) Пусть функция $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяет там оценке

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\pi}.$$

Какую особенность может иметь $f(z)$ в точке $z = 0$?

(3) Докажите, что не существует функции $f(z)$, голоморфной в проколотой окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющей равенству

$$e^{f(z)} = z$$

всюду в этой окрестности.

7.8. Теорема Сохоцкого.

ТЕОРЕМА. Если $a \in \mathbb{C}$ — существенно особая точка функции f , то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ можно найти последовательность точек $z_n \rightarrow a$ такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Пусть $A = \infty$. Согласно теореме из п. 7.6 функция f не может быть ограничена ни в какой проколотой окрестности точки a (иначе a была бы устранимой особой точкой для f). Поэтому найдется последовательность $z_n \rightarrow a$ такая, что $f(z_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

2°. Пусть $A \in \mathbb{C}$. Если в любой проколотой окрестности точки a найдется точка z с $f(z) = A$, то утверждение теоремы очевидно (можно даже найти последовательность $z_n \rightarrow a$ такую, что $f(z_n) = A$ для всех n). Если же это не так, то функция

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - A}$$

имеет при $z = a$ изолированную особую точку. Точка a не может быть полюсом или устранимой особенностью для функции $g(z)$, так как в обоих случаях функция

$$f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$$

имела бы предел (возможно, равный ∞) при $z \rightarrow a$, что противоречит определению существенно особой точки (см. п. 7.5). Следовательно, a — существенно особая точка для $g(z)$. Но тогда, согласно первой части доказательства, найдется последовательность $z_n \rightarrow a$ такая, что

$$g(z_n) \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что

$$f(z_n) = A + \frac{1}{g(z_n)} \rightarrow A \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$



Задачи. (1) Докажите, что утверждение теоремы Сохоцкого остается верным для предельной точки полюсов.

(2) Существует ли функция $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ такая, что

$$|f(z)| > e^{1/|z|} \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}?$$

7.9. $a = \infty$ как изолированная особая точка. В определение и классификацию изолированных особых точек $a \in \mathbb{C}$ из п. 7.5 можно включить (с небольшими модификациями) и случай $a = \infty$. Например, определение изолированной особой точки ∞ выглядит следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $a = \infty$ называется *изолированной особой точкой* (однозначного характера) для функции f , если $f \in \mathcal{O}(\{|z| > R\})$ для некоторого $R > 0$.

Тип изолированной особой точки ∞ (полюс, устранимая или существенно особая точка) определяется так же, как в п. 7.5. В соответствии с п. 2.6, точка $z = \infty$ является *устраняемой (полюсом, существенно особой)* для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда точка $\zeta = 0$ является *устраняемой (полюсом, существенно особой)* для функции $g(\zeta) := f(1/\zeta)$.

Результаты пп. 7.6, 7.7, характеризующие тип особой точки $a \in \mathbb{C}$ в терминах ряда Лорана, также немедленно переносятся на случай $a = \infty$. А именно, пусть $a = \infty$ является изолированной особой точкой функции f , голоморфной в некотором кольце $\{R < |z| < \infty\}$, которая разлагается в этом кольце в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Тогда $a = \infty$ есть:

- (1) *устраняемая особая точка* функции $f \iff c_n = 0$ при всех $n \geq 1$;
- (2) *полюс* функции $f \iff$ существует $N \geq 1$ такое, что

$$c_N \neq 0, \quad \text{но } c_n = 0 \quad \text{при } n \geq N + 1$$

(число N называется порядком полюса в ∞);

- (3) *существенно особая точка* функции $f \iff c_n \neq 0$ для бесконечного множества натуральных $n \geq 1$.

В силу этих результатов *главной частью* (т.е. частью, определяющей тип особой точки) *ряда Лорана* функции f в проколотой окрестности ∞ является ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

а его *регулярная часть* задается рядом

$$\sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n.$$

7.10. Целые функции с полюсом на бесконечности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция, голоморфная во всей комплексной плоскости \mathbb{C} , называется *целой*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если целая функция f имеет при $z = \infty$ устранимую особую точку или полюс, то f — полином.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через

$$P(z) = \sum_{n=1}^N c_n z^n$$

главную часть ряда Лорана функции f в проколотой окрестности точки ∞ , которая является полиномом согласно п. 7.9. Тогда функция $g(z) := f(z) - P(z)$ целая и имеет устранимую особенность в точке ∞ . Следовательно, $g(z) \equiv \text{const}$ по теореме Лиувилля (см. замечание в п. 6.4), откуда вытекает, что f есть полином. ■

Задачи. (1) Пусть f — целая функция и $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$. Покажите, что уравнение $f(z) = 5$ имеет решение $z \in \mathbb{C}$.

(2) Верно ли, что для всякой функции $f \in \mathcal{O}(\{|z| > 1\})$ найдется целая функция g такая, что $g(z) - f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$?

7.11. Мероморфные функции с полюсом на бесконечности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f называется *мероморфной в области* $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, если она не имеет в D других особенностей, кроме

поллюсов. Иными словами, существует подмножество $M \subset D$ такое, что $f \in \mathcal{O}(D \setminus M)$ и f имеет полюс в каждой точке $a \in M$.

Поскольку по определению полюса множество M состоит из изолированных точек, оно не более чем счетно (так как $M \cap K$ конечно для каждого компакта $K \subset D$).

Примером функции, мероморфной в \mathbb{C} , может служить функция $\operatorname{ctg}(z)$. В то же время функция $\operatorname{ctg}(1/z)$ не является мероморфной в \mathbb{C} , поскольку точка $z = 0$ является предельной для полюсов $\operatorname{ctg}(1/z)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если функция f мероморфна в \mathbb{C} и имеет при $z = \infty$ устранимую особую точку или полюс (тем самым, f мероморфна в $\overline{\mathbb{C}}$), то она рациональна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку полюсы f в $\overline{\mathbb{C}}$ изолированы, их множество состоит из конечного числа точек a_1, \dots, a_n . Обозначим через

$$R_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} c_{jk}(z - a_j)^{-k}, \quad j = 1, \dots, n,$$

главные части рядов Лорана функции f в проколотых окрестностях этих полюсов, а через

$$P(z) = \sum_{k=1}^n c_k z^k$$

главную часть ряда Лорана f в проколотой окрестности ∞ . Тогда функция

$$g := f - (P + R_1 + \dots + R_N)$$

голоморфна во всей комплексной плоскости \mathbb{C} и имеет устранимую особенность при $z = \infty$, откуда следует по теореме Лиувилля, что $g(z) \equiv \operatorname{const}$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство

$$f(z) = C + P(z) + R_1(z) + \dots + R_N(z),$$

полученное при доказательстве этого предложения, есть не что иное, как разложение рациональной функции $f(z)$ на простейшие дроби.

Лекция 8. Вычеты

8.1. Теорема Коши о вычетах. Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $V = \{0 < |z - a| < \varepsilon\}$ точки $a \in \mathbb{C}$, так что a является ее изолированной особенностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вычетом* функции f в изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ называется число

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} f(\zeta) d\zeta, \quad \text{где } 0 < r < \varepsilon$$

(по теореме Коши этот интеграл не зависит от выбора r).

ТЕОРЕМА КОШИ О ВЫЧЕТАХ. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область с простой границей и G — некоторая область в \mathbb{C} , содержащая замыкание \bar{D} области D . Предположим, что функция f голоморфна всюду в области G , за исключением конечного числа особых точек $a_1, \dots, a_n \in D$. Тогда

$$\int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{a_j} f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы круги

$$B_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_j| < \varepsilon\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

попарно не пересекались, а их замыкания содержались в D (см. рис. 30). Тогда по теореме Коши для многосвязной области (п. 5.2)

$$D_\varepsilon := D \setminus \bigcup_{j=1}^n \bar{B}_j$$

будем иметь

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D_\varepsilon} f(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^n \int_{\partial B_j} f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\partial D} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^n 2\pi i \operatorname{res}_{a_j} f, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

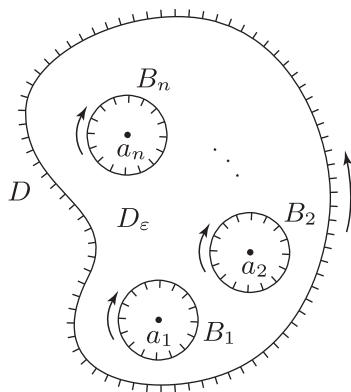


Рис. 30

8.2. Вычет в терминах ряда Лорана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если функция

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

голоморфна в проколотой окрестности $V = \{0 < |z-a| < \varepsilon\}$ точки $a \in \mathbb{C}$, то

$$\operatorname{res}_a f = c_{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываемое соотношение есть частный случай равенства (7.4) из п. 7.2, отвечающий $n = -1$. Впрочем, прямое доказательство столь просто, что стоит повторить его здесь:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_a f &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i c_{-1} = c_{-1}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались определением вычета, равномерной сходимостью ряда Лорана для f на окружности $|z-a| = r$, $0 < r < \varepsilon$, и примером 4.1 из п. 4.1; согласно этому примеру

интеграл $\int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz$ равен нулю при $n \neq -1$ и $2\pi i$ при $n = -1$. ■

СЛЕДСТВИЕ. *Вычет в устранимой особой точке $a \in \mathbb{C}$ равен нулю.*

Заметим, однако, что из равенства нулю вычета f в некоторой особой точке вовсе не следует, что эта точка является устранимой особенностью для f . Действительно, обращение в нуль лорановского коэффициента $c_{-1} = 0$ еще не означает, что обращаются в нуль коэффициенты c_{-2}, c_{-3}, \dots . Например, вычет в нуле функции z^{-2} равен нулю, но сама функция имеет полюс 2-го порядка в этой точке.

8.3. Формулы для вычисления вычетов.

Случай 1: вычет в простом полюсе. Пусть a есть простой полюс (т.е. полюс 1-го порядка) функции f . Лорановское разложение f в точке a имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

откуда

$$c_{-1} = \operatorname{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

Рассмотрим типичный пример функции, имеющей простой полюс. Предположим, что функция f представляется в проколотой окрестности точки a в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где функции $\varphi(z), \psi(z)$ голоморфны в окрестности a , причем

$$\varphi(a) \neq 0, \quad \psi(a) = 0, \quad \text{но } \psi'(a) \neq 0.$$

В этой ситуации

$$\operatorname{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) \cdot \frac{z-a}{\psi(z) - \psi(a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Случай полюса n -го порядка. Пусть a есть полюс n -го порядка функции f . Тогда ее лорановское разложение в точке a имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^m.$$

Чтобы “извлечь” отсюда c_{-1} , надо умножить $f(z)$ на $(z - a)^n$ и взять производную порядка $n - 1$ от получившейся функции при $z = a$:

$$\operatorname{res}_a f = c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}.$$

8.4. Вычет в точке $a = \infty$. Пусть функция f голоморфна во внешности некоторого круга $\{|z| \leq R_0\}$ и имеет ∞ своей изолированной особой точкой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вычетом f в бесконечности* называется число

$$\operatorname{res}_\infty f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^{-1}} f dz,$$

где интеграл берется по окружности $\gamma_R = \{|z| = R\}$ достаточно большого радиуса $R > R_0$, проходимой *по часовой стрелке*.

Нетрудно видеть, что *вычет в бесконечности функции f , заданной в области $\{|z| > R_0\}$ лорановским разложением*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

равен

$$\operatorname{res}_\infty f = -c_{-1}.$$

Для доказательства достаточно почленно проинтегрировать лорановское разложение f по γ_R^{-1} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенная формула показывает, в частности, что вычет в бесконечности отличается от вычета в общей точке $a \in \mathbb{C}$. Например, доказанное ранее утверждение: *вычет в особой точке равен нулю, если она устранима* — не справедливо для вычета в бесконечности. Это видимое различие исчезает в контексте общей теории римановых поверхностей. На данном этапе отметим только, что подлинной мотивацией приведенного определения вычета в бесконечности служит теорема о полной сумме вычетов, доказываемая в следующем пункте.

Задачи. (1) Пусть ∞ есть устранимая особая точка функции f . Покажите, что

$$\operatorname{res}_\infty f = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)).$$

(Это аналог формулы вычета в простом полюсе из п. 8.3.)

(2) Покажите, что

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res}_{\zeta=0} \frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

для всякой функции $f \in \mathcal{O}(\{|z| > R\})$.

8.5. Теорема о полной сумме вычетов.

ТЕОРЕМА О ПОЛНОЙ СУММЕ ВЫЧЕТОВ. Пусть функция f голоморфна во всей плоскости \mathbb{C} , за исключением конечного числа точек $\{a_\nu\}$. Тогда сумма вычетов в точках $\{a_\nu\}$ и в бесконечности равна нулю:

$$\operatorname{res}_\infty f + \sum_\nu \operatorname{res}_{a_\nu} f = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U_R = \{|z| < R\}$ — круг достаточно большого радиуса, содержащий все особые точки $\{a_\nu\}$. Применяя к этому кругу теорему Коши о вычетах (п. 8.1), получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R} f dz = \sum_\nu \operatorname{res}_{a_\nu} f.$$

Остается заметить, что левая часть этого равенства совпадает с $-\operatorname{res}_\infty f$. ■

8.6. Лемма Жордана. При практическом вычислении интегралов в комплексной области часто бывает полезной следующая

ЛЕММА ЖОРДАНА. Пусть функция f определена и непрерывна на множестве

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0\}.$$

Положим при $R \geq R_0$

$$M(R) := \max_{z \in \gamma_R} |f(z)|,$$

где γ_R есть полуокружность вида (см. рис. 31)

$$\gamma_R = \{z = Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

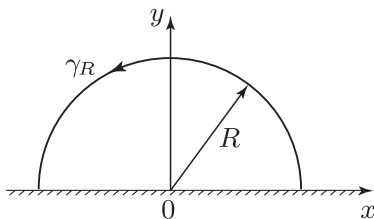


Рис. 31

Предположим, что f стремится к нулю на бесконечности так, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0.$$

Тогда для всякого $t > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{itz} dz = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{itz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{-tR \sin \theta + itR \cos \theta} i R e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi M(R) R e^{-tR \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Чтобы оценить последний интеграл, воспользуемся неравенством

$$\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta \quad \text{при } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

(график синуса над отрезком $[0, \pi/2]$ лежит выше хорды, см. рис. 32).

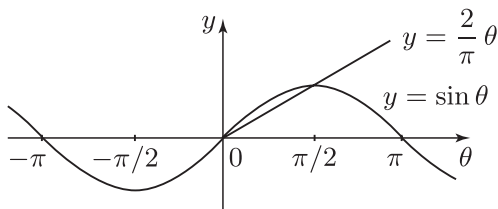


Рис. 32

Делая замену $\tau := 2R\theta/\pi$, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^\pi Re^{-tR \sin \theta} d\theta &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-tR \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} Re^{-2tR\theta/\pi} d\theta \\ &= \pi \int_0^R e^{-t\tau} d\tau = \frac{\pi}{t} (1 - e^{-tR}), \end{aligned}$$

откуда и следует требуемый результат. ■

Задача. На примере постоянной функции $f(z) \equiv 1$ проверьте, что без условия

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$$

лемма Жордана перестает быть справедливой.

8.7. Пример на вычисление преобразования Фурье от рациональных функций. Пусть $a > 0$, $t > 0$. Интеграл

$$I(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin tx}{x^2 + a^2} dx$$

сходится, если понимать его как

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x \sin tx}{x^2 + a^2} dx.$$

(Это можно показать, пользуясь признаком сходимости Абеля–Дирихле, но будет и независимо доказано в ходе нашего вычисления $I(t)$.) Рассмотрим следующий предел

$$J(t) := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x e^{itx}}{x^2 + a^2} dx.$$

Докажем, что он существует и найдем его значение. Обозначим через

$$f(z) := \frac{ze^{itz}}{z^2 + a^2}$$

продолжение подынтегральной функции в комплексную плоскость.

Граница области

$$D_R := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$$

состоит из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности $\gamma_R := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}$ (см. рис. 33).

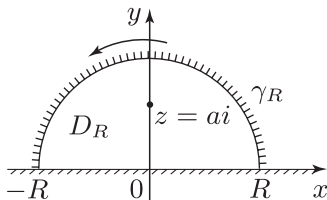


Рис. 33

Мы утверждаем, что интеграл

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \int_{\partial D_R} f(z) dz - \int_{\gamma_R} f(z) dz$$

равен $\pi i e^{-at} + o(1)$ при $R \rightarrow \infty$.

Действительно, если $R > a$, то интеграл по ∂D_R равен

$$2\pi i \operatorname{res}_{z=ai} f(z) = \pi i e^{-at}$$

по теореме о вычетах, а интеграл по γ_R есть $o(1)$ при $R \rightarrow \infty$ по лемме Жордана (здесь важно, что $t > 0!$). Устремляя $R \rightarrow \infty$, получаем, что

$$J(t) = \pi i e^{-at} \quad \text{при } t > 0.$$

Следовательно,

$$I(t) = \operatorname{Im} J(t) = \pi e^{-at} \quad \text{при } t > 0.$$

В силу нечетности $\sin tx$ по t окончательный ответ имеет вид:

$$I(t) = \begin{cases} \pi e^{-at} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t = 0, \\ -\pi e^{at} & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Поскольку функция

$$\operatorname{Re} \frac{x e^{itx}}{x^2 + a^2} = \frac{x \cos tx}{x^2 + a^2}$$

нечетна на отрезке $[-R, R]$, то

$$J(t) = iI(t).$$

Тем самым, наше рассуждение дает независимое от признака Абеля–Дирихле доказательство сходимости интеграла $I(t)$ при $t > 0$. Более того, возвращаясь при $t < 0$ к формуле

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \int_{\partial D_R} f(z) dz - \int_{\gamma_R} f(z) dz,$$

мы видим из нее теперь, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{ze^{itz}}{z^2 + a^2} dz = \pi i e^{at} + \pi i e^{-at} \neq 0.$$

Иными словами, *лемма Жордана при $t < 0$, вообще говоря, неверна.*

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Описанный метод позволяет также вычислить преобразование Фурье любой рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ с $\deg P \leq \deg Q - 1$.

Лекция 9. Аналитическое продолжение. Постановка задачи

9.1. Постановка задачи. Будем говорить, что функция f_1 , голоморфная в области D_1 , допускает аналитическое продолжение в область D_2 , имеющую непустое связное пересечение с D_1 , если найдется функция f_2 , голоморфная в области D_2 , такая, что

$$f_1 \equiv f_2 \quad \text{на } D_1 \cap D_2.$$

Аналогичным образом определяется мероморфное продолжение голоморфных (и мероморфных) функций.

Наиболее простым примером аналитического продолжения является продолжение голоморфной функции по непрерывности в устранимую особую точку. Например, функция $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ определена и голоморфна всюду в комплексной плоскости \mathbb{C} , за исключением точки $z = 0$, где она имеет устранимую особую точку. Голоморфное продолжение f в точку $z = 0$ задается рядом Лорана f в этой точке (который совпадает в данном случае с рядом Тейлора)

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$$

Другой пример — продолжение голоморфных функций, задаваемых интегралами, по параметру. В основе такого продолжения лежит следующая несложная

ЛЕММА. Пусть даны область $D \subset \mathbb{C}$ и непрерывная функция

$$\varphi = \varphi(t, z): [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{C},$$

голоморфная по переменной $z \in D$ при каждом фиксированном $t \in [a, b]$. Рассмотрим функцию f , задаваемую интегралом

$$f(z) = \int_a^b \varphi(t, z) dt.$$

Тогда f голоморфна в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равномерной непрерывности функции φ на множествах вида $[a, b] \times K$, где K — произвольный компакт из D , следует, что $f(z)$ непрерывно зависит от $z \in D$. По

теореме Морера остается доказать, что для всякого треугольника $\Delta \in K$ выполняется равенство

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} f(z) dz &= \int_{\partial\Delta} \int_a^b \varphi(t, z) dt dz \\ &= \int_a^b \int_{\partial\Delta} \varphi(t, z) dz dt = \int_a^b 0 dt = 0. \end{aligned}$$

(Второе равенство в этой цепочке следует из теоремы Фубини для непрерывных функций, а третье — из теоремы Коши.) ■

Продемонстрируем, как работает указанный метод продолжения по параметру на конкретном примере гамма-функции Эйлера.

9.2. Аналитическое продолжение Γ -функции. По определению гамма-функция задается интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

где

$$t^{z-1} := e^{(z-1)\ln t} \quad \text{при } t > 0, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Для доказательства сходимости этого несобственного интеграла в нуле и на бесконечности разобьем его в сумму двух интегралов

$$I_1(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{и} \quad I_2(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Интеграл $I_2(z)$ сходится при всех комплексных z , поскольку интеграл

$$\int_1^\infty |e^{-t} t^{z-1}| dt = \int_1^\infty e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1} dt$$

сходится при $z \in \mathbb{C}$. Более того, при $|z| \leq R$

$$|e^{-t} t^{z-1}| \leq e^{-t} t^{R-1},$$

поэтому $I_2(z)$ является равномерным пределом на компактах в \mathbb{C} функций

$$f_n(z) := \int_1^n e^{-t} t^{z-1} dt$$

при $n \rightarrow \infty$. Действительно,

$$|I_2(z) - f_n(z)| = \left| \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_n^\infty e^{-t} t^{R-1} dt \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Так как функции f_n являются целыми (т.е. голоморфны всюду в \mathbb{C}) по лемме из п. 9.1, то по теореме Вейерштрасса о рядах голоморфных функций (п. 6.14) получаем, что функция I_2 голоморфна всюду в \mathbb{C} .

Аналогично, интеграл

$$I_1(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^1 e^{-t} t^{z-1} dt$$

сходится и задает голоморфную функцию при $\operatorname{Re} z > 0$, поскольку интеграл

$$\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

сходится при каждом $\alpha > 0$. Таким образом, функция $\Gamma(z)$ определена и голоморфна при всех $\operatorname{Re} z > 0$.

Вопрос. Интеграл $I(t)$ из п. 8.7 не голоморфно зависит от t , хотя подынтегральное выражение голоморфно по t . Почему?

Покажем теперь, что *гамма-функция*, определенная выше для $\operatorname{Re} z > 0$, допускает мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость $z \in \mathbb{C}$.

Мы приведем два различных метода, осуществляющих указанное продолжение. Первый из них можно назвать продолжением с помощью *вычитания особенностей*.

Заметим, что для всех $z \in \mathbb{C}$ и $t \in [0, 1]$ функция $e^{-t} t^z$ может быть задана рядом

$$e^{-t} t^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}. \quad (9.1)$$

Указанный ряд при $\operatorname{Re} z > 1$ обладает следующими свойствами:

(а) все члены ряда (9.1) непрерывны по t на отрезке $[0, 1]$, а их интегралы по этому отрезку задаются обычной формулой

$$\int_0^1 t^{z+n-1} dt = \frac{1}{z+n};$$

(б) ряд (9.1) сходится равномерно по t на отрезке $[0, 1]$.

(Заметим, что условие $\operatorname{Re} z > 1$ важно для обоих утверждений!)

Поэтому ряд (9.1) можно проинтегрировать почленно по t :

$$I_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \quad \text{при } \operatorname{Re} z > 1.$$

Заметим, что ряд в правой части сходится при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Более того, если отбросить его члены с номерами $n = 0, 1, \dots, N-1$, то оставшийся ряд

$$f_N(z) := \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

будет сходиться равномерно на компактах в полуплоскости

$$D_N := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -N\}$$

(доказательство проводится так же, как в начале этого пункта). Поэтому функция f_N голоморфна в полуплоскости D_N , а гамма-функция в исходной полуплоскости $\{\operatorname{Re} z > 1\}$ задается формулой

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + f_N(z) + I_2(z). \quad (9.2)$$

Более того, по теореме единственности эта формула справедлива всюду, где голоморфны обе части равенства, т.е. при $\operatorname{Re} z > 0$. Полученная формула и выражает собой упомянутое выше “вычитание особенностей” — под знаком интеграла в $I_1(z)$ мы вычли из e^{-t} первые N членов тейлоровского разложения.

Заметим теперь, что правая часть формулы (9.2) задает функцию, голоморфную в $D_N \setminus \{0, -1, \dots, -(N-1)\}$ и совпадающую с $\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z > 0$, тем самым правая часть (9.2) задает *аналитическое продолжение функции $\Gamma(z)$ из области $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ в область $D_N \setminus \{0, -1, \dots, -(N-1)\}$* . По теореме единственности такое

продолжение, если оно существует, определено единственным образом, поэтому правую часть формулы (9.2) корректно считать определением функции $\Gamma(z)$ при $z \in D_N \setminus \{0, -1, \dots, -(N-1)\}$. Отсюда в силу произвольности N получаем, что

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Полученная формула задает аналитическое продолжение функции $\Gamma(z)$ из области $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ в область $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Точки $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, являются полюсами 1-го порядка продолженной функции с вычетами в них, равными $\frac{(-1)^n}{n!}$. Иными словами, главная часть ряда Лорана функции $\Gamma(z)$ в проколотой окрестности точки $z = -n$ равна $\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$. Таким образом, мы построили мероморфное продолжение $\Gamma(z)$ до функции, мероморфной во всей комплексной плоскости с простыми полюсами в точках $z = 0, -1, -2, \dots$.

Кратко опишем еще один способ аналитического продолжения гамма-функции с помощью функционального соотношения. Для этого воспользуемся известным функциональным соотношением для гамма-функции

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

(его справедливость при $\operatorname{Re} z > 0$ доказывается интегрированием по частям).

Считая функцию $\Gamma(z)$ определенной при $\operatorname{Re} z > 0$, положим

$$\Gamma(z) := \Gamma(z+1)/z \quad \text{при } \operatorname{Re} z > -1, \quad z \neq 0.$$

Это дает мероморфное продолжение функции $\Gamma(z)$ из полуплоскости D_0 в полуплоскость D_1 (где мы используем, как и выше, обозначение $D_N := \{\operatorname{Re} z > -N\}$) с полюсом 1-го порядка при $z = 0$ (заметим, что $\Gamma(1) = 1 \neq 0$). Повторяя эту процедуру, построим мероморфное продолжение $\Gamma(z)$ в полуплоскость D_2 и далее, по индукции, на всю комплексную плоскость.

9.3. Аналитическое продолжение логарифма. Разберем еще один пример аналитического продолжения, который принципиально отличается от рассмотренных выше. Он касается определения логарифма при комплексных значениях аргумента.

Начнем с круга $U = \{|z - 1| < 1\}$ с центром в точке $z = 1$ радиуса 1, в котором логарифм можно определить рядом Тейлора

$$\ln z \equiv f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z - 1)^n.$$

Этот ряд, как легко видеть, равномерно сходится на компактах из U и потому допускает почленное дифференцирование. В результате получаем

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - z)^{n-1} = \frac{1}{1 - (1 - z)} = \frac{1}{z}$$

при $z \in U$. Отсюда по формуле Ньютона–Лейбница

$$f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \quad \text{при } z \in U,$$

где интеграл берется по отрезку $[1, z]$. Полагая

$$f_0(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \quad \text{для } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

(интеграл берется снова по отрезку $[1, z]$), мы видим, что функция f_0 голоморфна в области $D_0 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, которая есть комплексная плоскость с выброшенной отрицательной вещественной полуосью $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0] \subset \mathbb{C}$. При этом $f_0 \equiv f$ в круге U .

Следующая задача показывает, что пределы функции $f_0(z)$ на верхнем и нижнем краях “разреза” $(-\infty, 0]$ не совпадают, откуда следует, что область определения функции $f_0(z)$ невозможно расширить далее, не нарушив голоморфности f_0 (и даже ее непрерывности).

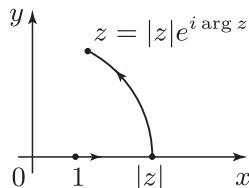


Рис. 34

Задача. Интегрируя функцию $1/\zeta$ вдоль пути (см. рис. 34)

$$[1, |z|] \cup \{|z|e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \arg z\},$$

доказать, что для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ справедлива формула

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

где $-\pi < \arg z < \pi$.

Тем самым, функция $f_0(z)$, голоморфная в области D_0 , не допускает дальнейшего аналитического продолжения в смысле определения, данного в начале п. 9.1. Однако было бы неестественно признать область D_0 максимальной областью определения функции $\ln z$. Действительно, поворачивая разрез \mathbb{R}_- на угол α и меняя соответственно границы изменения $\arg z$ в формуле

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

на $-\pi + \alpha < \arg z < \pi + \alpha$, мы можем построить аналитическое продолжение функции $\ln z$ из круга U в область $D_\alpha := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_\alpha$ с разрезом по лучу $\mathbb{R}_\alpha := e^{i\alpha}\mathbb{R}_-$. Объединение областей D_α при разных α покрывает всю комплексную плоскость с выброшенным началом $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому если у функции $\ln z$ и имеется максимальная область аналитичности, то ею должна быть проколотая комплексная плоскость \mathbb{C}^* . (Ниже мы вновь вернемся к этому примеру и разберем его на основе теории Вейерштрасса.)

Еще одним аргументом в пользу того, что “настоящей” областью определения логарифма должна быть проколотая комплексная плоскость \mathbb{C}^* , является то, что интеграл

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta},$$

взятый вдоль произвольного пути в \mathbb{C}^* , ведущего из 1 в $z \in \mathbb{C}^*$, имеет смысл для любых $z \in \mathbb{C}^*$. При этом он, правда, зависит от выбора этого пути. А именно, если путь γ_2 получается из пути γ_1 добавлением n обходов вокруг начала координат, то

$$\int_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + 2\pi in.$$

(Между прочим, это дает решение задачи из п. 4.1.)

Отметим, впрочем, что при указанном выше способе аналитического продолжения $\ln z$ в проколотую комплексную плоскость \mathbb{C}^* каждой ее точке будет отвечать счетное число различных значений $\ln z$. Тем самым, продолженная функция уже не является “функцией” в общепринятом значении этого термина.

Указанная трудность, возникающая при построении аналитического продолжения логарифма, была в центре внимания классиков комплексного анализа XIX-го века. Один из путей ее преодоления, предложенный Вейерштрассом, состоит в том, чтобы рассматривать продолженную “функцию” как множество пар вида (D_α, f_α) , где f_α есть результат аналитического продолжения $\ln z$ из U в D_α . Подход Вейерштрасса (который подробно излагается в следующей лекции) хотя и разрешает имеющиеся трудности, но ценой отказа от привычного понятия функции. Настоящее решение проблемы аналитического продолжения было найдено позже Риманом. Согласно подходу Римана аналитическое продолжение логарифма можно все же рассматривать как функцию (причем, голоморфную), но заданную не на проколотой комплексной плоскости \mathbb{C}^* , а на некоторой “римановой поверхности”, накрывающей \mathbb{C}^* . Мы вернемся к теории Римана в лекции 12.

Лекция 10. Теория Вейерштрасса

10.1. Постановка задачи. Напомним определение аналитического продолжения, данное в начале п. 9.1. Функция g , голоморфная в области $G \subset \mathbb{C}$, является аналитическим продолжением функции f , голоморфной в области $D \subset \mathbb{C}$, имеющей связное непустое пересечение с D , если $f \equiv g$ на $D \cap G$.

Как показывает пример логарифма, рассмотренный в предыдущем параграфе, это определение является слишком узким и не покрывает все интересующие нас случаи. Поэтому мы будем называть в дальнейшем аналитическое продолжение в смысле приведенного определения *непосредственным аналитическим продолжением* в отличие от более общих понятий *аналитического продолжения по цепочке*, которое определяется ниже в этом пункте, и *аналитического продолжения вдоль пути*, которое вводится в п. 10.4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция g , заданная и голоморфная в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$, является *аналитическим продолжением функции f* , заданной и голоморфной в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ по цепочке областей, если найдутся:

- а) цепочка областей $D_0 = D, D_1, \dots, D_{N-1}, D_N = G$ со связными непустыми последовательными пересечениями $D_k \cap D_{k+1}$ для $k = 0, 1, \dots, N - 1$;
- б) набор функций $f_0 = f, f_1, \dots, f_{N-1}, f_N = g$, голоморфных в областях D_k и аналитически продолжающих друг друга в том смысле, что f_k есть непосредственное аналитическое продолжение f_{k+1} для $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Это определение принадлежит Вейерштрассу, который предложил брать в качестве областей D_0, D_1, \dots, D_N , фигурирующих в этом определении, круги с центрами в точках a_k такие, что центр a_k каждого круга D_k принадлежит предыдущему кругу D_{k-1} . Тогда функция f_k , голоморфная в круге D_k , задается (сходящимся) рядом Тейлора с центром в точке a_k , а непосредственное аналитическое продолжение из круга D_k в круг D_{k+1} осуществляется с помощью переразложения ряда Тейлора для f_k в точке a_{k+1} . Пару, состоящую из круга и сходящегося в нем ряда Тейлора, Вейерштрасс назвал элементом аналитической функции. В следующих параграфах мы подробно рассмотрим это понятие.

10.2. Элементы и их аналитическое продолжение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Элементом* называется пара $F = (U, f)$, состоящая из круга $U = \{|z - a| < R\}$ с центром в точке a и функции f , голоморфной в этом круге. Точка a называется *центром* элемента, а число R — его *радиусом*. Элемент F называется *каноническим*, если U совпадает с кругом сходимости ряда Тейлора функции f с центром в точке a .

Примером канонического элемента может служить пара, состоящая из круга $U = \{|z - 1| < 1\}$ с центром в точке 1 радиуса 1 и функции $f(z) = \ln z$, задаваемой в этом круге рядом Тейлора

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементы $F = (U, f)$ и $G = (V, g)$ являются *непосредственным аналитическим продолжением* (сокращенно: *НАП*) друг друга, если (см. рис. 35)

$$U \cap V \neq \emptyset \text{ и } f = g \text{ на } U \cap V.$$

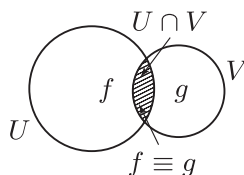


Рис. 35

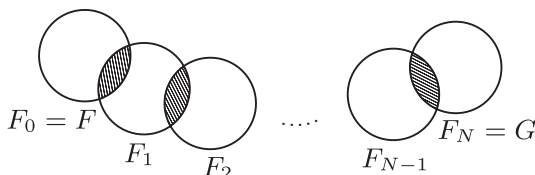


Рис. 36

Элемент G называется *аналитическим продолжением элемента F по цепочке* $F_0 = F, F_1, \dots, F_{N-1}, F_N = G$, если (см. рис. 36)

$$F_{n+1} \text{ есть НАП } F_n \text{ при } n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Пусть даны две цепочки элементов F_0, F_1, \dots, F_N и $\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_{\tilde{N}}$, осуществляющих аналитическое продолжение одного и того же элемента $F := F_0 = \tilde{F}_0$, причем конечные элементы $G := F_N$ и $\tilde{G} := \tilde{F}_{\tilde{N}}$ имеют общий центр. Спрашивается, следует ли отсюда, что

$$G = \tilde{G}?$$

Отрицательный ответ на этот вопрос вытекает из следующей задачи (в которой можно взять $\tilde{N} = 1$, $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_0 = F_0$).

Задача. Рассмотрим аналитическое продолжение элемента $F_0 = (U_0, f_0)$, где $U_0 = \{|z - 1| < 1\}$,

$$f_0(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \arg z / 2}, \quad -\pi/2 < \arg z < \pi/2,$$

задаваемое элементами F_0, F_1, F_2, F_3 , где $F_j = (U_j, f_j)$ для $j = 1, 2, 3$ однозначно задаются условием

$$U_j = \{|z - e^{2\pi i j / 3}| < 1\}.$$

Тогда $U_3 = U_0$, но $f_3 = -f_0 \neq f_0$.

Указание: все f_j задаются той же формулой, что и f_0 , разница лишь в границах изменения $\arg z$.

Отметим одно очевидное, но важное свойство канонических элементов, оправдывающее введение этого понятия. *Если канонические элементы $F = (U, f)$ и $G = (V, g)$ являются НАП друг друга и имеют общий центр, то они равны: $F = G$.*

10.3. Свойства непосредственного аналитического продолжения. Укажем еще два очевидных, но важных свойства непосредственного аналитического продолжения элементов, которые постоянно используются ниже.

(А) **СВОЙСТВО ВЕЙЕРШТРАССА.** *Если $G = (V, g)$ есть НАП элемента $F = (U, f)$ и центр b круга V лежит в U (см. рис. 37),*

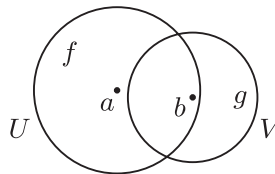


Рис. 37

то ряд Тейлора для g получается переразложением ряда Тейлора для f в точке b , т.е.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n$$

для всех $z \in V$. Обратное, взяв произвольную точку $b \in U$, зададим $g(z)$ этой формулой и определим V как круг сходимости этого ряда; тогда (V, g) есть НАП (U, f) .

(В) СВОЙСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА. Пусть элемент $F_1 = (U_1, f_1)$ есть НАП элемента $F_0 = (U_0, f_0)$, а элемент $F_2 = (U_2, f_2)$ есть НАП F_1 (см. рис. 38). Если

$$U_0 \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset,$$

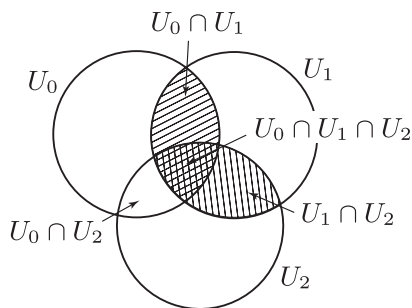


Рис. 38

то F_2 есть НАП F_0 .

Последнее свойство выражает “частичную транзитивность” отношения НАП; настоящей транзитивностью это отношение обладать не может в силу задачи из предыдущего параграфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (А) следует из теоремы о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Для доказательства утверждения (В) заметим, что на непустом открытом подмножестве $U_0 \cap U_1 \cap U_2$ множества $U_0 \cap U_2$ справедливо равенство $f_2 \equiv f_1 \equiv f_0$. По теореме единственности отсюда следует, что

$$f_2 \equiv f_0 \quad \text{всюду на } U_0 \cap U_2,$$

тем самым, F_2 есть НАП F_0 . ■

10.4. Продолжение канонических элементов вдоль пути. Непрерывным аналогом аналитического продолжения по цепочке является понятие аналитического продолжения вдоль пути, которое мы сформулируем и будем использовать только для канонических элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство канонических элементов

$$F_t = (U_t, f_t), \quad t \in I = [0, 1],$$

называется *аналитическим продолжением канонического элемента* F_0 *вдоль пути* $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ (см. рис. 39), если:

- (1) центр a_t элемента F_t совпадает с $\gamma(t)$, а его радиус $R(t)$ строго положителен для всех $t \in I$;
- (2) для любого $t_0 \in I$ найдется связная окрестность $u_{t_0} \subset I$ точки t_0 такая, что для всех $t \in u_{t_0}$ имеем

$$\gamma(t) \in U_{t_0} \text{ и } F_t \text{ есть НАП } F_{t_0}.$$

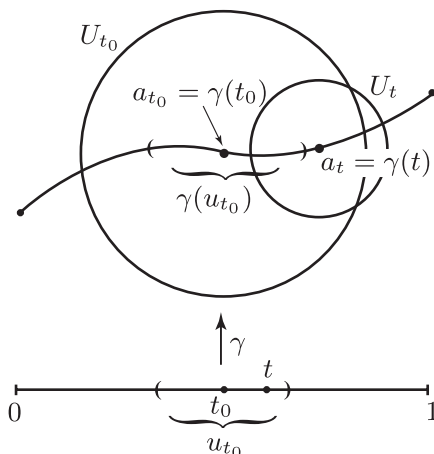


Рис. 39

Как мы увидим в п. 10.5, процесс аналитического продолжения вдоль пути сводится к последовательному переразложению начального элемента F_0 вдоль γ , так что следующий результат о единственности интуитивно очевиден.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\{F_t : t \in I\}$ и $\{\tilde{F}_t : t \in I\}$ — два аналитических продолжения канонического элемента $F_0 = \tilde{F}_0$ вдоль пути γ , то

$$F_1 = \tilde{F}_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем множество

$$E := \{t \in I : F_t = \tilde{F}_t\}.$$

Оно

- (1) непусто, так как $0 \in E$;
- (2) открыто, поскольку из $t_0 \in E$ следует, что

$$u_{t_0} \cap \tilde{u}_{t_0} \subset E$$

в силу свойства (А) из п. 10.3;

- (3) замкнуто; действительно, если $t_0 \in I$ — предельная точка для множества E , то в пересечении $u_{t_0} \cap \tilde{u}_{t_0}$ найдется точка $t_1 \in E$; тогда канонические элементы F_{t_0} и \tilde{F}_{t_0} являются НАП элемента $F_{t_1} = \tilde{F}_{t_1}$ и имеют общий центр $\gamma(t_0)$, поэтому они совпадают (см. замечание в конце п. 10.2).

В силу связности отрезка I получаем отсюда, что $E = I$, откуда следует утверждение предложения. ■

ЛЕММА. Пусть $R(t)$ есть радиус элемента F_t из семейства канонических элементов $\{F_t : t \in I\}$, осуществляющих аналитическое продолжение элемента F_0 вдоль пути $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда либо $R(t) = \infty$ для всех $t \in I$, либо $R : I \rightarrow \mathbb{R}$ есть непрерывная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Пусть $R(t_0) = \infty$ для некоторого $t_0 \in I$. Тогда в силу свойства (А) из п. 10.3 и теоремы о разложении в ряд Тейлора получаем, что

$$R(t) = \infty \quad \text{для всех } t \in u_{t_0}.$$

Далее, как и в доказательстве предыдущего предложения, вводим множество $\{t \in I : R(t) = \infty\}$ и показываем, что оно непусто, открыто и замкнуто (детали оставляем читателю).

2°. Пусть $R(t_0) < \infty$. Тогда при $t \in u_{t_0}$ пересечение $\partial U_t \cap \partial U_{t_0}$ будет непусто (иначе замыкание одного из кругов U_t, U_{t_0} лежало

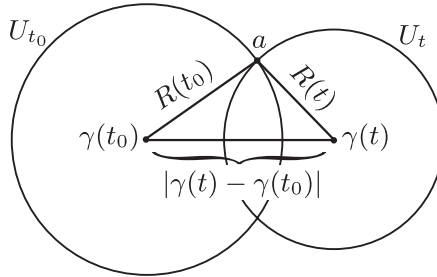


Рис. 40

бы в другом круге, что противоречит свойству (А) из п. 10.3). Выберем точку $a \in \partial U_t \cap \partial U_{t_0}$. Тогда в треугольнике с вершинами в точках $\gamma(t)$, a , $\gamma(t_0)$ выполняется неравенство (см. рис. 40)

$$|R(t) - R(t_0)| \leq |\gamma(t) - \gamma(t_0)|$$

(длина одной из сторон треугольника больше разности длин двух других сторон). В силу непрерывности функции $\gamma(t)$ отсюда следует непрерывность функции $R(t)$. ■

10.5. Эквивалентность аналитического продолжения по цепочке и вдоль пути. Теперь мы покажем, что понятия аналитического продолжения вдоль пути и по цепочке эквивалентны друг другу. Более точно, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (1) Пусть семейство канонических элементов $\{F_t : t \in I\}$ осуществляет аналитическое продолжение элемента F_0 вдоль пути γ . Тогда найдется набор точек $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ такой, что элемент F_1 совпадает с аналитическим продолжением F_0 по цепочке

$$F_0 = F_{t_0}, \quad F_{t_1}, \quad \dots, \quad F_{t_n} = F_1.$$

(2) Обратное, пусть канонический элемент G является аналитическим продолжением канонического элемента F по некоторой цепочке канонических элементов

$$F = F_0, \quad F_1, \quad \dots, \quad F_n = G.$$

Обозначим через $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ (параметризованную) ломаную, последовательно соединяющую центры элементов F_0, F_1, \dots, F_n .

Тогда найдется семейство канонических элементов F_t , $t \in I$, осуществляющих аналитическое продолжение элемента F_0 вдоль пути γ , такое, что

$$F_{t=1} = F_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Согласно лемме из п. 10.4 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $R(t) \geq \varepsilon$ для всех $t \in I$. В силу равномерной непрерывности функции $\gamma(t)$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|s - t| < \delta \implies |\gamma(s) - \gamma(t)| < \varepsilon.$$

Выберем из покрытия отрезка $I = [0, 1]$ интервалами

$$I_t := u_t \cap (t - \delta/2, t + \delta/2)$$

конечное подпокрытие $I_{t_1}, \dots, I_{t_{n-1}}$, где $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1}$, и положим $t_0 = 0$, $t_n = 1$. Тогда

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| < \varepsilon \quad \text{при } j = 1, \dots, n$$

(по определению δ) и элемент F_{t_j} есть НАП элемента $F_{t_{j-1}}$ (по определению u_t для $t = t_{j-1}, t_j$).

(2) Достаточно доказать утверждение для $n = 1$. (Тогда общий случай немедленно получается индукцией по n .) Поэтому будем считать, что $F_1 = G$ есть НАП элемента F_0 , а ломаная $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ есть просто отрезок, соединяющий центры $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ канонических элементов F_0, F_1 . Запишем $F_k = (U_k, f_k)$ для $k = 0, 1$ и определим для каждого $t \in [0, 1]$ канонический элемент $F_t = (U_t, f_t)$ с центром $\gamma(t)$ требованием, что ряд Тейлора $f_t(z)$ получается переразложением $f_0(z)$ или $f_1(z)$ с центром в точке $\gamma(t)$. (Независимость f_t от выбора f_0 или f_1 для $\gamma(t) \in U_0 \cap U_1$ вытекает из свойства треугольника, п. 10.3 (В).)

Чтобы проверить, что $\{F_t : t \in I\}$ есть искомое аналитическое продолжение, остается лишь задать окрестности u_{t_0} (см. определение в п. 10.4). Возьмем за u_{t_0} любую связную окрестность t_0 в I такую, что $\gamma(u_{t_0})$ целиком содержится в U_0 или U_1 . Тогда для всех $t \in u_{t_0}$ элемент F_t есть НАП F_{t_0} в силу свойства (А) из п. 10.3. ■

10.6. Теорема о продолжении вдоль гомотопных путей.

ТЕОРЕМА. Пусть γ_0, γ_1 — два пути с общими концами

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a, \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b,$$

гомотопные друг другу в \mathbb{C} . Пусть $\gamma: I \times I \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывное отображение, задающее эту гомотопию, т.е.

$$\gamma(s, 0) = a, \quad \gamma(s, 1) = b \quad \text{для всех } s \in I,$$

и пути

$$\gamma_s: I \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_s(t) := \gamma(s, t),$$

осуществляют деформацию пути γ_0 в путь γ_1 (см. рис. 21 из п. 5.1). Предположим, что канонический элемент $F = (U, f)$ с центром в точке a допускает аналитическое продолжение $\{F_{st} : t \in I\}$ вдоль каждого пути $\gamma_s, s \in I$. Тогда результаты продолжения F вдоль γ_0 и γ_1 совпадают:

$$F_{01} = F_{11}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $s_0 \in I$. Согласно лемме из п. 10.4 существует $\varepsilon > 0$ такое, что радиус $R(s_0, t)$ элемента $F_{s_0, t}$ удовлетворяет неравенству

$$R(s_0, t) > \varepsilon \quad \text{для всех } t \in I.$$

Пользуясь равномерной непрерывностью функции γ , выберем окрестность $v = v_{s_0} \subset I$ точки s_0 так, чтобы при $s \in v$ выполнялось неравенство

$$\max_{t \in I} |\gamma(s_0, t) - \gamma(s, t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Покажем, что

- (i) для всех $s \in v$ результат аналитического продолжения F вдоль γ_s совпадает с результатом аналитического продолжения F вдоль γ_{s_0} .

Чтобы доказать это, построим для $s \in v, t \in I$ новое семейство канонических элементов \tilde{F}_{st} , которое определяется следующим образом. Элемент $\tilde{F}_{st} := (\tilde{U}_{st}, \tilde{f}_{st})$ этого семейства имеет центр

в точке $\gamma(s, t)$ и целиком определяется рядом Тейлора $\tilde{f}_{st}(z)$, который получается переразложением ряда Тейлора $f_{s_0 t}(z)$ в точке $\gamma(s, t)$.

Достаточно проверить, что

- (ii) для всех $s \in v$ семейство элементов $\{\tilde{F}_{st} : t \in I\}$ осуществляет аналитическое продолжение $\tilde{F}_{s_0} = F$ вдоль γ_s .

Действительно, из справедливости указанного утверждения (ii) вытекает в силу теоремы единственности из п. 10.4, что результат F_{s_1} аналитического продолжения F вдоль γ_s совпадает с $\tilde{F}_{s_1} := F_{s_0, 1}$, что доказывает утверждение (i).

Чтобы доказать (ii), нужно построить для произвольного $t_0 \in I$ окрестность \tilde{u}_{t_0} (см. определение в п. 10.4). Выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $|t_1 - t_2| < \delta$ выполнялось неравенство

$$|\gamma(s_0, t_1) - \gamma(s_0, t_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

(этого можно добиться ввиду равномерной непрерывности функции γ_{s_0}). Покажем, что в качестве искомой окрестности \tilde{u}_{t_0} можно взять

$$\tilde{u}_{t_0} := u_{t_0} \cap \left(t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2} \right).$$

Действительно, точка $\gamma(s_0, t)$ принадлежит каждому из четырех кругов $U_{s_0 t_0}$, $U_{s_0 t}$, $\tilde{U}_{s_0 t_0}$, $\tilde{U}_{s_0 t}$ (их радиусы велики по сравнению с расстояниями между центрами; см. рис. 41), так что пересечение любых трех из этих кругов непусто.

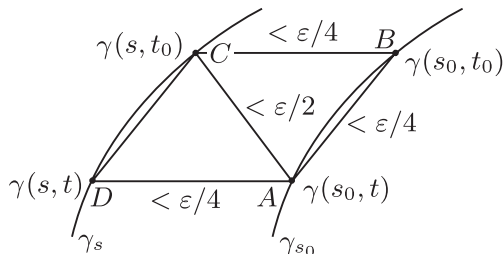


Рис. 41

Поэтому, последовательно применяя свойство (В) из п. 10.3 к треугольникам ABC и ACD на рисунке, будем иметь:

$$\begin{cases} \tilde{F}_{st_0} & \text{есть НАП } F_{s_0t_0} \quad (\text{определение } \tilde{F}), \\ F_{s_0t} & \text{есть НАП } F_{s_0t} \quad (\text{определение } u_{t_0}), \end{cases}$$

откуда вытекает, что \tilde{F}_{st_0} есть НАП F_{s_0t} и вследствие этого

$$\begin{cases} \tilde{F}_{st_0} & \text{есть НАП } F_{s_0t} \quad (\text{как только что доказано}), \\ F_{s_0t} & \text{есть НАП } \tilde{F}_{st} \quad (\text{определение } \tilde{F}), \end{cases}$$

откуда вытекает, что \tilde{F}_{st_0} есть НАП \tilde{F}_{st} . Тем самым, \tilde{F}_{st} есть НАП \tilde{F}_{st_0} для всех $t \in \tilde{u}_{t_0}$. Этим доказано утверждение (ii), а с ним и утверждение (i).

Заметим, что до сих пор мы нигде не пользовались тем, что продолжение F возможно вдоль *всех* путей γ_s . (При выводе (ii) мы доказали существование продолжения вдоль γ_s для всех $s \in v$, пользуясь только продолжением вдоль γ_{s_0} .) Теперь воспользуемся этим условием, чтобы вывести из (i) утверждение теоремы. Именно, результат G_s продолжения F вдоль γ_s есть *всюду определенная* (по условию) и *локально постоянная* (в силу (i)) функция от s на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, эта функция не зависит от s , откуда вытекает утверждение теоремы. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение из п. 10.4 и только что доказанная теорема очень похожи на определение первообразной вдоль пути (п. 4.5) и теорему Коши о гомотопии (п. 5.1). Это сходство не случайно: теорема Коши о гомотопии представляет собой частный случай доказанной теоремы, когда исходный элемент задается локальной первообразной $F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$ функции $f(z)$ в окрестности точки a . С этой точки зрения следующую теорему можно рассматривать как обобщение следствия 5.2 из п. 5.1 о существовании глобальной первообразной в односвязной области.

СЛЕДСТВИЕ (теорема о монодромии). Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и $F = (U, f)$ — канонический элемент с центром в точке $a \in D$. Предположим, что он допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути $\gamma \subset D$ с началом a . Тогда для любой точки $b \in D$ продолжение F вдоль произвольного пути $\gamma \subset D$ с началом a и концом b дает один и тот же

результат $G = (V, g)$. Тем самым, аналитические продолжения F вдоль всевозможных путей в D определяют некоторую функцию, голоморфную в области D . В окрестности V точки b эта функция задается рядом Тейлора g элемента $G = (V, g)$, полученного продолжением элемента $F = (U, f)$ вдоль произвольного пути с началом a и концом b . Построенная таким образом голоморфная функция задает аналитическое продолжение функции f в область D .

Лекция 11. Аналитические функции

11.1. Определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область и $F_0 = (U_0, f_0)$ — канонический элемент с центром в точке $a \in D$ и $U_0 \subset D$, допускающий аналитическое продолжение вдоль любого пути γ в области D с началом в точке a . Множество \mathcal{F} канонических элементов, получаемых продолжением F_0 вдоль всех таких путей, называется (*многозначной*) *аналитической функцией* в области D , порожденной элементом F_0 .

Заметим, что любой канонический элемент F аналитической функции \mathcal{F} с центром в произвольной точке $b \in D$ обладает тем же свойством, что и исходный элемент F_0 , а именно: F допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути $\gamma \subset D$ с началом в точке b , и совокупность всех этих продолжений есть снова \mathcal{F} .

Простейшим примером аналитической функции в области $D \subset \mathbb{C}$ является совокупность \mathcal{F} всех канонических элементов $F_a = (U_a, f_a)$, $a \in D$, некоторой голоморфной функции $f \in \mathcal{O}(D)$. (Здесь $f_a(z)$ есть сумма ряда Тейлора функции f с центром $a \in D$, а U_a — круг сходимости этого ряда.) В дальнейшем мы будем отождествлять такую аналитическую функцию \mathcal{F} с обычной голоморфной функцией f и говорить, что \mathcal{F} *однозначна* в D . Теорема о монодромии (п. 10.6) эквивалентно переформулируется в этих терминах так: *всякая аналитическая функция в односвязной области однозначна*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть \mathcal{F} есть аналитическая функция в области $D \subset \mathbb{C}$ и $D_1 \subset D$ — подобласть. Если существует канонический элемент $F_1 = (U_1, f_1) \in \mathcal{F}$, совокупность продолжений которого вдоль всех путей $\gamma \subset D_1$ задает в указанном выше смысле некоторую голоморфную функцию $g \in \mathcal{O}(D_1)$, то будем говорить, что аналитическая функция \mathcal{F} *допускает выделение однозначной ветви* в области D_1 , а пару (D_1, g) называть *ветвью* (или *аналитическим элементом*) аналитической функции \mathcal{F} в области D_1 .

Заметим, что класс объектов, называемых “аналитическими функциями”, не изменится, если каждую аналитическую функцию \mathcal{F} рассматривать как множество всех ее аналитических элементов (не обязательно канонических). При этом сохраняется определение аналитической функции \mathcal{F} как совокупности всех продолжений любого ее (аналитического) элемента *по цепочке*

(что для канонических элементов эквивалентно продолжению *вдоль пути*), если считать два аналитических элемента (D_1, f_1) и (D_2, f_2) *непосредственным аналитическим продолжением* друг друга, если и только если $f_1 \equiv f_2$ на *некоторой* связной компоненте множества $D_1 \cap D_2$ (см. рис. 42).

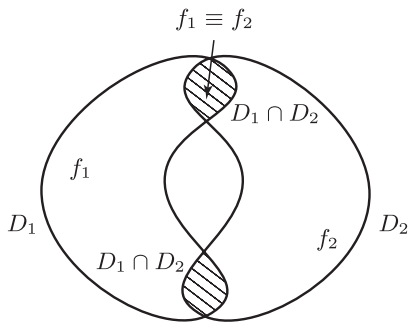


Рис. 42

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Аналитические элементы (D_1, f_1) и (D_2, f_2) называются *эквивалентными в точке* $a \in \mathbb{C}$, если $a \in D_1 \cap D_2$ и $f_1 \equiv f_2$ в окрестности a . (Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности.) Классы эквивалентности называются *ростками в точке* a .

Множество всех ростков в точке a образует *кольцо*, обозначаемое \mathcal{O}_a . Если росток функции f в точке a обозначать через $\{f\}_a$, то операции над ростками задаются так:

$$\{f\}_a + \{g\}_a := \{f + g\}_a, \quad \{f\}_a \{g\}_a := \{fg\}_a.$$

Аналитическим продолжением ростка φ_0 *вдоль пути* $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ называется семейство ростков $\varphi_t \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ такое, что для любого $t_0 \in I$ найдутся связная окрестность $u = u_{t_0} \subset I$ точки t_0 , область $D_{t_0} \subset \mathbb{C}$ и функция $f \in \mathcal{O}(D_{t_0})$ такие, что

$$\gamma(u) \subset D_{t_0} \quad \text{и} \quad \{f\}_{\gamma(t)} = \varphi_t \quad \text{для всех} \quad t \in u.$$

Суммируем данные в этом параграфе определения. Любую аналитическую функцию можно рассматривать одновременно как:

- (1) совокупность канонических элементов, получающихся из начального элемента аналитическим продолжением (по цепочкам или путям);
- (2) множество аналитических элементов, получающихся из начального элемента аналитическим продолжением (по цепочкам);
- (3) совокупность ростков, получающихся из начального ростка аналитическим продолжением (вдоль путей).

Полезным упражнением, которое мы оставляем читателю, является доказательство эквивалентности всех этих подходов к определению аналитической функции.

11.2. Пример: аналитическая функция \sqrt{z} . Зададим начальный аналитический элемент f этой функции формулой

$$f(z) = \sqrt{|z|} e^{i \arg z / 2}, \quad \text{где } -\pi < \arg z < \pi.$$

Функция f , задаваемая этой формулой, голоморфна в плоскости с выброшенной отрицательной вещественной полуосью $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Из равенства $f(z)^2 = z$ следует, что

$$f'(z) = \frac{1}{2f(z)}.$$

Разложим $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 1$. Указанный ряд сходится в круге $U_0 = \{|z - 1| < 1\}$ (по общей теореме из п. 6.2), который совпадает с кругом сходимости, поскольку $f'(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 0$. Обозначим сумму этого ряда через $f_0(z)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Канонический элемент (U_0, f_0) допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с началом в точке $z = 1$ и не допускает продолжения ни по какому пути $\gamma \subset \mathbb{C}$, проходящему через 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольный непрерывный путь $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с началом в точке $\gamma(0) = 1$ можно записать в виде

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\theta(t)},$$

где $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция с $\theta(0) = 0$. Положим (см. рис. 43)

$$U_t := \{z \in \mathbb{C} : |z - \gamma(t)| < |\gamma(t)|\}$$

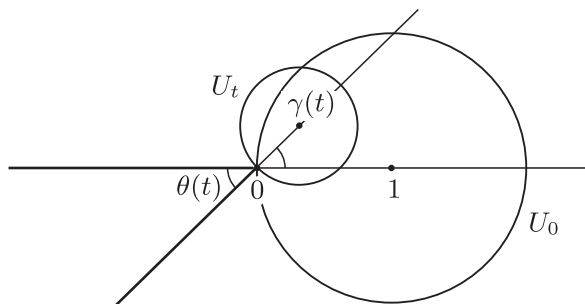


Рис. 43

и зададим семейство элементов $f_t \in \mathcal{O}(U_t)$, осуществляющих аналитическое продолжение элемента (U_0, f_0) вдоль пути γ , формулой

$$f_t(z) = \sqrt{|z|} e^{i \arg z / 2}, \quad \text{где } -\pi + \theta(t) < \arg z < \pi + \theta(t).$$

Функция f_t , задаваемая этой формулой, голоморфна в плоскости с выброшенным лучом $\mathbb{R}_{\theta(t)} = e^{i\theta(t)}\mathbb{R}_-$, выходящим из начала координат под углом $\pi + \theta(t)$. В качестве окрестности u_{t_0} (фигурирующей в определении из п. 10.4) годится любая связная окрестность точки t_0 в I такая, что $\gamma(u_{t_0}) \subset U_{t_0}$; существование такой окрестности вытекает из непрерывности функции $\theta(t)$.

Если же путь $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ таков, что $\gamma(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in I$, то для любого продолжения $\{F_t : t \in I\}$ вдоль γ мы должны иметь

$$f'_{t_0}(z) = \frac{1}{2f_{t_0}(z)} \rightarrow \infty \quad \text{при } z \rightarrow \gamma(t_0) = 0$$

(равенство $f'_t(z) = 1/(2f_t(z))$ остается верным для всех f_t по теореме единственности), что доказывает невозможность продолжения вдоль γ . \blacksquare

Аналитическая функция на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, задаваемая совокупностью продолжений начального элемента (U_0, f_0) вдоль всевозможных путей в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, обозначается через \sqrt{z} . Она двузначна в том смысле, что для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеются ровно два ее канонических элемента с центром в z .

Продemonстрируем на примере аналитической функции \sqrt{z} , что в теореме о продолжении вдоль гомотопных путей из п. 10.6

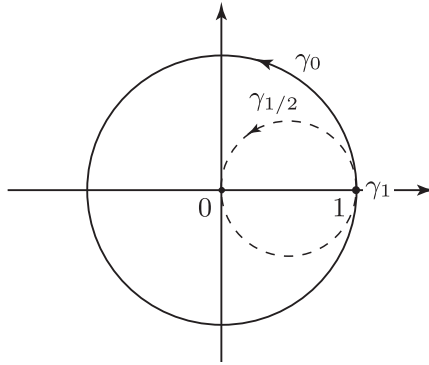


Рис. 44

условие продолжимости вдоль *всех* путей γ_s является существенным. Действительно, семейство окружностей (см. рис. 44)

$$\gamma_s = \{z \in \mathbb{C} : |z - s| = 1 - s\}, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

задает гомотопию кривых γ_0 и γ_1 с общими началом и концом $a = b = 1$, но результаты продолжения (U_0, f_0) вдоль окружности γ_0 и “стянутого в точку” пути γ_1 разные: при продолжении вдоль γ_0 мы получаем, по сказанному выше, элемент $(U_0, -f_0)$, а при продолжении вдоль γ_1 — элемент (U_0, f_0) . Причина несовпадения в том, что путь $\gamma_{1/2}$ проходит через 0, так что продолжение вдоль него невозможно.

11.3. Пример: аналитическая функция $\ln z$. В исходном каноническом элементе (U_0, f_0) этой функции U_0 есть круг $U_0 = \{|z - 1| < 1\}$ радиуса 1 с центром в точке $z = 1$, а ряд Тейлора f_0 задается формулой

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n = \ln |z| + i \arg z, \quad \text{где } -\pi < \arg z < \pi,$$

(см. п. 9.3). Этот элемент можно продолжать вдоль любого пути $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с началом в точке $z = 1$ либо с помощью формулы

$$f_t(z) = \ln |z| + i \arg z \quad \text{с } -\pi + \theta(t) < \arg z < \pi + \theta(t)$$

(аналогично п. 11.2), либо с помощью интеграла

$$f_t(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta},$$

взятого вдоль композиции пути $\gamma([0, t])$ и прямолинейного отрезка, соединяющего точку $\gamma(t)$ с z . В итоге получаем аналитическую функцию $\ln z$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, имеющую бесконечное (счетное) число различных элементов в каждой точке $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Задача. Рассмотрим канонический элемент $F = (U, f)$, где $U = \{|z| < 1\}$ и $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ при $|z| < 1$. (Функция $f(z)$ называется дилогарифмом.) Покажите, что F допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$ с $\gamma(0) = 0$ и $0 \notin \gamma((0, 1])$, но не допускает продолжения вдоль окружности $\{|z - 1| = 1\}$, рассматриваемой как путь с началом и концом $z = 0$.

11.4. Действия над аналитическими функциями. Пусть \mathcal{F}, \mathcal{G} — две аналитических функции в области $D \subset \mathbb{C}$ и $F = (U, f)$, $G = (V, g)$ — произвольные канонические элементы этих функций с центром в точке $a \in D$. Тогда канонические элементы с центром в a , отвечающие функциям $f', f+g, fg$, допускают аналитическое продолжение вдоль любых путей в D . Совокупность результатов этих продолжений (по всем возможным выборам F и G) обозначается соответственно через $\mathcal{F}', \mathcal{F}+\mathcal{G}, \mathcal{F}\mathcal{G}$. Подчеркнем, что построенные множества канонических элементов не обязательно задают *одну* единственную аналитическую функцию. Вполне может случиться так, что каждое из множеств канонических элементов $\mathcal{F}', \mathcal{F}+\mathcal{G}, \mathcal{F}\mathcal{G}$ распадается на несколько (возможно, даже счетное число) *различных* аналитических функций. Поясним это на примерах. Совокупность продолжений суммы $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ состоит из двух аналитических функций $2\sqrt{z}$ и 0 , а суммы $i \ln z + \ln z$ — из счетного числа различных аналитических функций. Напротив, производная $(\ln z)' = 1/z$ определяет единственную (и притом однозначную) аналитическую функцию.

Чтобы определить *композицию* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, допустим, что \mathcal{F} есть аналитическая функция в области $D \subset \mathbb{C}_z$ и значения *всех ветвей* \mathcal{F} лежат в области $D_1 \subset \mathbb{C}_w$, на которой задана аналитическая функция \mathcal{G} . Возьмем произвольные канонические элементы $F = (U, f)$, $G = (V, g)$ наших функций с центрами в точках $a \in D$ и $f(a) \in f(D)$ соответственно. Тогда канонический элемент с центром a , отвечающий функции $g \circ f$, *допускает продолжение вдоль любых путей в D* . Совокупность всех таких продолжений обозначается через $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ и снова может состоять из одной или нескольких аналитических функций. Например, композиция $\Phi \circ \mathcal{F}$ аналитических функций $\Phi(w) = w^2$ и $\mathcal{F}(z) = \sqrt[4]{z}$ пред-

ставляет собой одну аналитическую функцию $(\sqrt[4]{z})^2 = \sqrt{z}$ (что, кстати, не совпадает с произведением $\sqrt[4]{z} \sqrt[4]{z} = \{\sqrt{z}, i\sqrt{z}\}$), тогда как их композиция $\mathcal{F} \circ \Phi$, взятая в другом порядке, распадается на 2 аналитические функции: \sqrt{w} и $i\sqrt{w}$. Следующее общее замечание будет использовано в пп. 11.8 и 12.6.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть \mathcal{F} — аналитическая функция на области $D \subset \mathbb{C}$, значения всех ветвей \mathcal{F} лежат в области $G \subset \mathbb{C}$ и $\Phi \in \mathcal{O}(G)$. Тогда композиция $\Phi \circ \mathcal{F}$ определена и является *одной* аналитической функцией в D . Действительно, если $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ есть множество всех элементов (ветвей) \mathcal{F} над произвольным кругом $U \subset D$, то все элементы композиции $\Phi \circ \mathcal{F}$ над U имеют вид $\Phi \circ f_\alpha$, $\alpha \in A$. Если f_β получается из f_α продолжением вдоль некоторого пути в D , то $\Phi \circ f_\beta$ получается из $\Phi \circ f_\alpha$ продолжением вдоль того же пути. Поэтому любой элемент $\Phi \circ \mathcal{F}$ над U может быть получен из любого другого элемента $\Phi \circ \mathcal{F}$ над U продолжением вдоль некоторого пути в D , чем и доказано, что $\Phi \circ \mathcal{F}$ есть *одна* аналитическая функция на D .

Многозначные аналитические функции возникают, в частности, как функции, обратные к голоморфным. Рассмотрим, например, операции “извлечения корня” и “взятия логарифма” от голоморфной функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, функция f голоморфна в D и $f(D) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда найдутся функции g и h , голоморфные в области D , такие, что

$$f = g^2 \quad \text{и} \quad f = e^h \quad \text{в} \quad D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим композицию $\sqrt{f(z)}$, имеющую смысл согласно сказанному выше. По теореме о монодромии она распадается над D на однозначные ветви. Если $g(z)$ — любая из этих ветвей, то $g \in \mathcal{O}(D)$ и

$$g^2 = f \quad \text{в} \quad D.$$

Аналогичное рассмотрение композиции $\ln f(z)$ дает голоморфную в D функцию h , для которой $f = e^h$ в D . ■

Задачи. (1) Завершите следующее доказательство приведенного предложения, не использующее теории аналитического продолжения.

Пусть $h_1(z)$ есть первообразная функции $f'(z)/f(z)$ в D (существующая в силу односвязности D , см. следствие 5.2 из п. 5.1). Тогда

$$e^{h_1(z)} = Cf(z) \quad \text{в } D$$

для некоторой ненулевой комплексной константы C . Пользуясь этим, легко построить функцию $h \in \mathcal{O}(D)$ такую, что $e^h = f$. Тогда $g(z) = e^{h(z)/2}$ удовлетворяет $g^2 = f$.

(2) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область. Покажите, что голоморфная в D функция $f \neq 0$ является квадратом другой голоморфной в D функции тогда и только тогда, когда порядки всех нулей f в D четны.

(3) Пусть \mathcal{F} есть аналитическая функция на $D := \{0 < |z| < 1\}$ и ни одна из ветвей \mathcal{F} не имеет нулей в D . Может ли композиция $\sqrt{\mathcal{F}}$ состоять из более чем двух аналитических функций на D ?

Мы вернемся к вопросу об обращении голоморфных функций в п. 14.2 (где будет объяснено, что происходит в окрестности тех точек, в которых не определены элементы обратной функции) и в п. 23.2 (где будет приведен пример ситуации, когда элементы обратной функции определены в окрестности каждой точки, но их аналитическое продолжение возможно не по всем путям).

Наконец, определим *сужение* $\mathcal{F}|_{D_1}$ аналитической функции \mathcal{F} , заданной в области $D \subset \mathbb{C}$, на подобласть $D_1 \subset D$ как совокупность продолжений всех входящих в \mathcal{F} канонических элементов с центрами, принадлежащими D_1 , по всем путям $\gamma \subset D_1$. Эта совокупность также может состоять из нескольких аналитических функций в D_1 . Например, так происходит всякий раз когда \mathcal{F} неоднозначна в D , а область D_1 односвязна: тогда, по теореме о монодромии сужение $\mathcal{F}|_{D_1}$ состоит из нескольких однозначных и голоморфных в D_1 функций. Количество этих функций равно “числу листов” аналитической функции \mathcal{F} в области D , определяемому в следующей задаче. (Объяснение названия “число листов” будет дано в более общем контексте в п. 12.6.)

Задачи. (4) Пусть \mathcal{F} есть аналитическая функция в области $D \subset \mathbb{C}$. Покажите, что количество $n_z(\mathcal{F})$ содержащихся в \mathcal{F} канонических элементов с центром z не зависит от выбора точки $z \in D$. Обозначим это количество через $n(\mathcal{F})$ и назовем числом листов \mathcal{F} в D . Пусть $D_1 \subset D$ — произвольная односвязная область. Покажите, что сужение $\mathcal{F}|_{D_1}$ состоит в точности из $n(\mathcal{F})$ различных голоморфных в D_1 функций.

(5) Рассмотрим аналитическую функцию $\mathcal{F}(z) = z^z = e^{z \ln z}$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Покажите, что число листов \mathcal{F} в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ равно ∞

несмотря на то, что для всех целых взаимно простых $m, n \geq 1$ число различных значений, принимаемых функцией \mathcal{F} в точке $z = m/n$, равно n .

Подведем итог нашего обсуждения действий над аналитическими функциями.

ИТОГОВОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Операции над аналитическими функциями (такие, как сложение и вычитание, произведение и деление, композиция, дифференцирование и интегрирование, сужение, взятие обратной функции) определяются “поэлементно” и могут приводить не к одной, а к нескольким аналитическим функциям.

11.5. Изолированные особые точки аналитической функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *изолированной особой точкой* аналитической функции \mathcal{F} , если \mathcal{F} является аналитической функцией в проколотой окрестности V точки a вида

$$V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$$

при $a \in \mathbb{C}$ и

$$V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \varepsilon^{-1}\}$$

при $a = \infty$.

ЛЕММА 11.1. Пусть V есть проколотая окрестность точки a . Тогда для всякого замкнутого пути $\gamma: I \rightarrow V$ с $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0 \in V$ найдется единственное $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $\gamma \sim \gamma_0^n$, т.е. путь γ гомотопен пути γ_0^n , где γ_0 обозначает окружность

$$\gamma_0(t) = a + (z_0 - a)e^{2\pi it}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

радиуса $|z_0 - a|$ с центром в точке a .

Здесь и далее запись $\alpha \sim \beta$ означает, что пути α, β гомотопны внутри V с фиксированными началом и концом, а $\alpha \cup \beta$ обозначает путь, полученный композицией путей α и β ; в этом же смысле понимается степень γ_0^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Существование n .* Рассмотрим полярное представление

$$z_0 - a = |z_0 - a|e^{i\varphi_0},$$

где $\varphi_0 = \arg(z_0 - a)$. Тогда

$$\gamma_0^n(t) = a + |z_0 - a|e^{i(\varphi_0 + 2\pi nt)} \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1.$$

Путь $\gamma(t)$ можно также записать в полярной форме:

$$\gamma(t) = a + |\gamma(t) - a|e^{i\varphi(t)} \quad \text{при } t \in I = [0, 1],$$

где $\varphi(t) = \arg(\gamma(t) - a)$ — некоторая непрерывная вещественнозначная функция на отрезке I с $\varphi(0) = \varphi_0$. Из $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$ следует, что $\varphi(1) - \varphi(0) = 2\pi n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим отображение $\Gamma: I \times I \rightarrow V$, задаваемое формулой

$$\Gamma(s, t) = a + |z_0 - a|^s |\gamma(t) - a|^{1-s} e^{i\{(\varphi_0 + 2\pi nt)s + \varphi(t)(1-s)\}}.$$

Оно непрерывно и при $s = 0$ совпадает с

$$\Gamma(0, t) = a + |\gamma(t) - a|e^{i\varphi(t)} = \gamma(t),$$

а при $s = 1$ — с

$$\Gamma(1, t) = a + |z_0 - a|e^{i(\varphi_0 + 2\pi nt)} = a + (z_0 - a)e^{2\pi int} = \gamma_0^n(t).$$

Таким образом, $\Gamma(s, t)$ осуществляет гомотопию γ в γ_0^n . Менее формально, $\ln |\Gamma(s, t) - a|$ задается выпуклой линейной комбинацией функций $\ln |z_0 - a|$ и $\ln |\gamma(t) - a|$, а $\arg(\Gamma(s, t) - a)$ — выпуклой линейной комбинацией функций $\arg(\gamma_0^n(t) - a)$ и $\arg(\gamma(t) - a)$ (см. рис. 45).

Единственность n . Если $\gamma \sim \gamma_0^{n_1} \sim \gamma_0^{n_2}$, то путь $\delta = \gamma_0^{n_1 - n_2}$ гомотопен постоянному пути $\iota(t) \equiv z_0$ внутри V . Следовательно, по теореме Коши

$$2\pi i(n_1 - n_2) = \int_{\delta} \frac{dz}{z - a} = 0,$$

т.е. $n_1 = n_2$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Отображение $\gamma \mapsto n$, определяемое леммой 11.1, задает изоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(V, z_0)$ с группой целых чисел \mathbb{Z} .

ЛЕММА 11.2. Пусть a — изолированная особая точка аналитической функции \mathcal{F} , заданной на некоторой проколотой окрестности V этой точки. Если результат продолжения некоторого канонического элемента $F_0 \in \mathcal{F}$ (с центром в точке $z_0 \in V$)

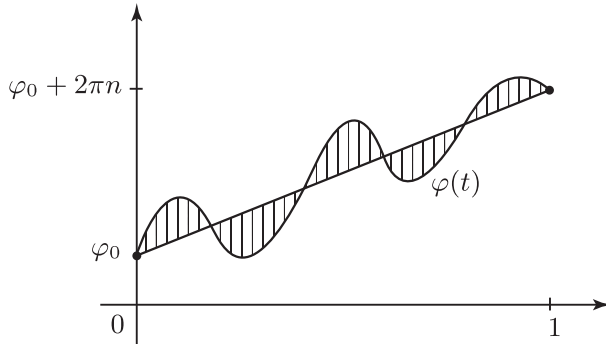


Рис. 45

вдоль γ_0 снова совпадает с F_0 , то \mathcal{F} есть однозначная голоморфная функция на V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 11.1 любые два пути $\gamma_1, \gamma_2 \subset V$ с началом в точке z_0 и концом в произвольной точке $z \in V$ удовлетворяют условию

$$\gamma_2 \sim \gamma_1 \cup \gamma_0^n$$

для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому ввиду условия леммы результат продолжения F_0 вдоль любого пути $\gamma \subset V$ с $\gamma(0) = z_0$ зависит только от конечной точки пути $\gamma(1) = z$ и не зависит от выбора самого пути $\gamma \subset V$, ведущего в эту точку. Отсюда следует однозначность \mathcal{F} . ■

11.6. Классификация изолированных особых точек.

Пусть аналитическая функция \mathcal{F} на проколотой окрестности V точки a порождается каноническим элементом $F_0 \in \mathcal{F}$ с центром в точке $z_0 \in V$. Для $n \in \mathbb{Z}$ обозначим через F_n результат продолжения F_0 вдоль пути γ_0^n , введенного в формулировке леммы 11.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (1) Если $F_1 = F_0$ (т.е. результат продолжения F_0 вдоль γ_0 совпадает снова с F_0), то аналитическая функция \mathcal{F} однозначна и голоморфна в V по лемме 11.2. В этом случае a называется *изолированной особой точкой однозначного характера* для \mathcal{F} .

(2) Если $F_1 \neq F_0$, то a называется *точкой ветвления* для \mathcal{F} . При этом если $F_n = F_0$ для некоторого $n \geq 2$, то a называется

ся точкой ветвления конечного порядка; в этом случае порядком ветвления \mathcal{F} в точке a называется число $\min\{n \geq 2 : F_n = F_0\}$. В противном случае a называется логарифмической точкой ветвления для \mathcal{F} .

Отметим, что дальнейшая классификация особых точек однозначного характера для \mathcal{F} (т.е. подразделение их на устранимые особые точки, полюсы и существенно особые точки) сводится к классификации изолированных особых точек для голоморфной функции \mathcal{F} .

ЛЕММА 11.3. Данное выше определение не зависит от выбора канонического элемента $F_0 \in \mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим другой канонический элемент \tilde{F}_0 аналитической функции \mathcal{F} с центром в точке $\tilde{z}_0 \in V$. Пусть $\tilde{\gamma}_0$ — замкнутый путь вида

$$\tilde{\gamma}_0(t) = a + (\tilde{z}_0 - a)e^{2\pi it}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

из леммы 11.1, являющийся образующей группы $\pi_1(V, \tilde{z}_0)$. Обозначим, как и выше, через \tilde{F}_n , $n \in \mathbb{Z}$, результат продолжения \tilde{F}_0 вдоль пути $\tilde{\gamma}_0^n$.

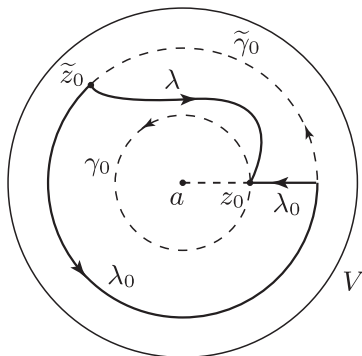


Рис. 46

Пусть $\lambda \subset V$ есть путь с началом \tilde{z}_0 и концом z_0 такой, что продолжение \tilde{F}_0 вдоль λ совпадает с F_0 (см. рис. 46). Обозначим через λ_0 стандартный путь, ведущий из точки \tilde{z}_0 в точку z_0 : этот путь идет сначала из точки \tilde{z}_0 в положительном направлении по

окружности $\tilde{\gamma}_0$ до точки ее пересечения с лучом с началом в точке a , проходящим через точку z_0 , а затем идет по указанному лучу в точку z_0 . По лемме 11.1 имеем

$$\lambda \cup \lambda_0^{-1} \sim \gamma_0^m \implies \lambda \sim \gamma_0^m \cup \lambda_0 \quad (11.1)$$

для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Непосредственно проверяется, что

$$\tilde{\gamma}_0 \sim \lambda_0^{-1} \cup \gamma_0 \cup \lambda_0.$$

Пользуясь соотношением (11.1), выводим отсюда, что $\tilde{\gamma}_0 \sim \lambda^{-1} \cup \gamma_0 \cup \lambda$ и

$$\tilde{\gamma}_0^n \sim \lambda^{-1} \cup \gamma_0^n \cup \lambda \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, результат продолжения элемента \tilde{F}_n вдоль λ совпадает с F_n для всех $n \in \mathbb{Z}$ (по теореме о продолжении вдоль гомотопных путей). Тем самым, условия $F_n = F_0$ и $\tilde{F}_n = \tilde{F}_0$ эквивалентны. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть V есть проколота окрестность точки $a \in \mathbb{C}$, а \mathcal{F} — аналитическая функция в некоторой области $D \supset V$. Тогда сужение $\mathcal{F}|_V$ может состоять из *нескольких* аналитических функций на V (см. п. 11.4) и каждая из этих функций на V может иметь *свою* особенность в точке a . Рассмотрим в качестве примера аналитическую функцию, задаваемую формулой

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{z}} - \sqrt{2}}$$

на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Ее сужение на множество $V = \{0 < |z - 1| < 1/2\}$ состоит из трех различных аналитических функций, одна из которых имеет при $z = 1$ точку ветвления порядка 2, вторая — устранимую особую точку, а третья — полюс.

Задача. Доказать это и изучить особенности $\mathcal{F}(z)$ при $z = 0$ и $z = \infty$. (Здесь может пригодиться приводимая ниже лемма 11.4.)

11.7. Примеры аналитических функций и их особых точек.

ПРИМЕР 11.1. Корень n -й степени $z^{1/n}$ является n -значной аналитической функцией на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, которая определяется по аналогии с \sqrt{z} (см. п. 11.2) и имеет по одной точке ветвления

порядка n над каждой из точек $z = 0, \infty$. Аналитическая функция $\ln z$, введенная в п. 11.3, имеет по одной логарифмической точке ветвления над каждой из точек $z = 0, \infty$.

ПРИМЕР 11.2. Аналитическая функция $\sqrt{\operatorname{tg}(1/z)}$ имеет по одной точке ветвления 2-го порядка над каждой из точек

$$z = \frac{1}{\pi n}, \quad \frac{1}{\pi/2 + \pi m}, \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

$$z = \infty.$$

Это следует из леммы 11.4 ниже. Точка $z = 0$ является *неизолированной* особенностью (предельной точкой точек ветвления).

ЛЕММА 11.4. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и имеет нуль 1-го порядка при $z = a$. Тогда аналитическая функция $\sqrt{f(z)}$ имеет точку ветвления порядка 2 при $z = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $a \in \mathbb{C}$. В некоторой окрестности U точки a имеет место равенство

$$f(z) = (z - a)g(z),$$

где функция $g(z)$ голоморфна и не обращается в нуль в U . По предположению из п. 11.4

$$g = h^2$$

для некоторой функции $h(z)$, голоморфной в U . Отсюда получаем равенство

$$\sqrt{f(z)} = h(z)\sqrt{z - a}$$

аналитических функций в U . Следовательно, $\sqrt{f(z)}$ имеет при $z = a$ ту же особенность, что и $\sqrt{z - a}$, т.е. точку ветвления порядка 2. Случай $a = \infty$ сводится к предыдущему заменой $z \rightarrow 1/z$. ■

ПРИМЕР 11.3. Показательная функция

$$z^a := e^{a \ln z}$$

является аналитической функцией на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ при $a \in \mathbb{C}$. Остановимся на ее свойствах при различных значениях a :

- (1) Если a целое, то z^a является однозначной голоморфной функцией на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, имеющей при $z = 0$ устранимую особую точку (если $a \geq 0$) или полюс (если $a < 0$). Какую особенность имеет z^a при $z = \infty$?
- (2) Пусть $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, т.е. $a = m/n$, где m, n — целые взаимно простые числа и $n > 1$. Тогда z^a является аналитической функцией на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, имеющей по одной точке ветвления порядка n при $z = 0$ и $z = \infty$.
- (3) Если $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, то z^a есть аналитическая функция на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, которая имеет по одной логарифмической точке ветвления при $z = 0$ и $z = \infty$.

ПРИМЕР 11.4. При каждом $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ формула

$$a^z := e^{z \ln a}$$

задает счетное число различных аналитических функций, каждая из которых голоморфна во всей комплексной плоскости.

ЗАДАЧА. Описать особенности этих функций при $z = \infty$.

11.8. Ряды Пуансо. Пусть \mathcal{F} есть аналитическая функция в проколотой окрестности $V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ точки a , имеющая a точкой ветвления порядка n . Обозначим через

$$v := \{\zeta \in \mathbb{C} : 0 < |\zeta| < \varepsilon^{1/n}\}$$

проколотую окрестность нуля в плоскости переменного ζ и рассмотрим голоморфное отображение $\pi : v \rightarrow V$, задаваемое формулой

$$\pi(\zeta) = a + \zeta^n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Композиция $\mathcal{F} \circ \pi$ распадается на n различных голоморфных функций на v . Если обозначить через $\Phi = \Phi_0$ любую из этих функций, то остальные функции Φ_j , $j = 1, \dots, n - 1$, получаются из нее заменой переменной по формуле

$$\Phi_j(\zeta) = \Phi(\alpha^j \zeta), \quad \text{где } \alpha := e^{2\pi i/n}, \quad j = 1, \dots, n - 1.$$

При этом сама \mathcal{F} восстанавливается по функции Φ по формуле

$$\mathcal{F} = \Phi \circ \pi^{-1}.$$

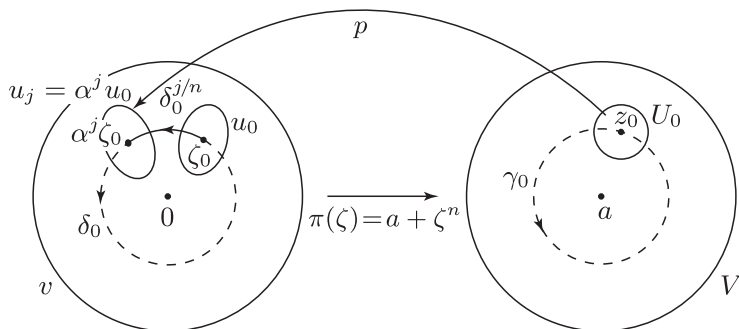


Рис. 47

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Следуя определению композиции аналитических функций, выберем точку $\zeta_0 \in v$ и ее связную окрестность $u_0 \subset v$ так, чтобы отображение $\pi: u_0 \rightarrow V$ задавало биекцию u_0 на круг $U_0 \subset V$ с центром в точке $z_0 = \pi(\zeta_0)$ (см. рис. 47). Иными словами, u_0 совпадает с одним из связных прообразов круга U_0 при отображении π . Остальные прообразы u_j , $j = 1, \dots, n-1$, получаются из u_0 по формуле $u_j = \alpha^j u_0$. По теореме о монодромии \mathcal{F} распадается над кругом U_0 на n однозначных ветвей

$$F_j = (U_0, f_j), \quad j = 0, \dots, n-1,$$

которые занумерованы так, что F_j обозначает результат продолжения F_0 вдоль γ_0^j для $j = 0, \dots, n-1$ (где γ_0 обозначает, как и ранее, окружность с центром в точке a , проходящую через z_0). Все функции f_j различны по определению точки ветвления n -го порядка. Пусть δ_0 есть окружность с центром в $\zeta = 0$, проходящая через точку ζ_0 . Тогда если точка ζ пробегает δ_0 , то ее образ $z = \pi(\zeta)$ пробегает γ_0^n . Композиция элементов F_j с отображением π дает нам элементы

$$G_j := F_j \circ \pi = (u_0, f_j \circ \pi) =: (u_0, g_j), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Аналитическое продолжение любого из элементов G_j вдоль окружности δ_0 отвечает (в образе отображения π) аналитическому продолжению F_j вдоль γ_0^n , приводящему снова к элементу F_j . Тем самым, при аналитическом продолжении вдоль δ_0 каждый элемент G_j переходит в себя. Отсюда следует, по лемме 11.2, что каждый элемент G_j определяет некоторую однозначную голоморфную функцию $\Phi_j \in \mathcal{O}(v)$. Тем самым показано, что композиция

$\mathcal{F} \circ \pi$ состоит из n однозначных функций $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1} \in \mathcal{O}(v)$. Все эти функции *различны*, так как различны функции f_j (см. выше), а отображение π локально обратимо.

2°. Зафиксируем любую функцию $\Phi \in \mathcal{O}(v)$ из набора $\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}\}$. Согласно замечанию из п. 11.4 композиция $\Phi \circ \pi^{-1}$ есть *одна* аналитическая функция на V , получаемая продолжением элементов вида $(U_0, \Phi \circ p)$ вдоль всевозможных путей в V , где $p: U_0 \rightarrow v$ обозначает одну из ветвей аналитической функции

$$\zeta = \pi^{-1}(z) = (z - a)^{1/n} \quad \text{в } V.$$

Но тогда аналитическая функция $\Phi \circ \pi^{-1}$ должна *совпадать* с \mathcal{F} , ибо имеет с ней общий элемент $(U_0, \Phi \circ p)$. Этим доказано равенство аналитических функций $\Phi \circ \pi^{-1} = \mathcal{F}$, составляющее вторую часть предложения.

3°. Если $\Psi \in \mathcal{O}(v)$ — любая другая функция из набора $\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}\}$, то из равенства $\Phi \circ \pi^{-1} = \Psi \circ \pi^{-1}$ аналитических функций на V (обе части которого равны \mathcal{F} , согласно п. 2°) вытекает, что в окрестности точки $z_0 \in V$ функция $\Psi(p(z))$ совпадает с одним из элементов $\Phi \circ \pi^{-1}$. Следовательно, согласно п. 2°

$$\Psi(p(z)) = \Phi(\alpha^j p(z)) \quad \text{для некоторого } j \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Таким образом, имеем $\Psi(\zeta) = \Phi(\alpha^j \zeta)$ для всех ζ из некоторой окрестности точки $p(z_0)$ в v , а значит, по теореме единственности, и для всех $\zeta \in v$. Этим доказано оставшееся утверждение предложения. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 11.1. Второе утверждение предложения можно переформулировать так: для всякой аналитической функции $\mathcal{F}(z)$ на V с точкой ветвления порядка n при $z = a$ найдется однозначная функция $\Phi(\zeta)$ такая, что

$$\mathcal{F}(z) = \Phi((z - a)^{1/n}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11.2. Разложим функцию $\Phi(\zeta)$ в ряд Лорана

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \zeta^k \quad \text{для } \zeta \in v$$

и подставим формально $\zeta = (z - a)^{1/n}$. Получим *разложение* \mathcal{F} в ряд *Пуизо*:

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - a)^{k/n}.$$

Не нужно, однако, рассматривать указанное разложение как *равенство аналитических функций на V* , это просто другая запись соотношения $\mathcal{F}(z) = \Phi \circ \pi^{-1}(z)$.

Задачи. (1) Пусть $a, b \in \mathbb{C}$. Докажите, что аналитическая функция $z^a(1-z)^b$ допускает выделение однозначной ветви на $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ (соответственно на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$) тогда и только тогда, когда $a + b \in \mathbb{Z}$ (соответственно $a, b \in \mathbb{Z}$).

(2) Пусть \mathcal{F} есть аналитическая функция на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, причем для всех ее ветвей (D, f) справедлива оценка

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{при } z \in D.$$

Докажите, что \mathcal{F} однозначна и тождественно равна константе.

(3) Что является аналогом ряда Пуансо в случае логарифмической точки ветвления? Более подробно, пусть \mathcal{F} есть аналитическая функция на $V := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ с логарифмической точкой ветвления при $z = a$. Положим $v := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta < \ln \varepsilon\}$ и зададим отображение $\pi: v \rightarrow V$ формулой $\pi(\zeta) = a + e^\zeta$. Что представляет собой композиция $\mathcal{F} \circ \pi$ и верно ли, что $\mathcal{F}(z) = \Phi(\ln(z-a))$ для некоторой однозначной функции $\Phi(\zeta)$?

Лекция 12. Римановы поверхности

Теория Вейерштрасса аналитических функций, изложенная в двух предыдущих лекциях, при том, что она позволяет успешно работать с многозначными аналитическими функциями, обладает одним существенным недостатком — аналитические функции не являются функциями в обычном понимании этого слова. Подход Римана, который излагается ниже, позволяет устранить этот недостаток и включить теорию Вейерштрасса в общематематический контекст теории функций на гладких многообразиях.

Коротко говоря, идея римановского подхода заключается в следующем. Любая аналитическая функция $w = \mathcal{F}(z)$ в области $D \subset \mathbb{C}$ переменной z трактуется как обычная однозначная функция $w = \Phi(\zeta)$ новой переменной ζ , которая изменяется уже не в области D , а на некоторой (своей для каждой \mathcal{F}) римановой поверхности X , многолистно накрывающей область D . При этом многозначность $\mathcal{F}(z)$ как функции z проистекает из того, что над каждой точкой $z \in D$ располагается не одна, а несколько точек $\zeta \in X$ — именно столько, сколько различных элементов с центром z имеет аналитическая функция \mathcal{F} .

Прежде чем точно сформулировать определение римановых поверхностей (это будет сделано в пп. 12.5–12.8), мы попытаемся пояснить его на конкретных примерах, связанных с хорошо известными многозначными аналитическими функциями (см. пп.12.1–12.3).

12.1. Риманова поверхность функции $w = \sqrt{z}$. Рассмотрим отображение $z = f(w) = w^2$, обратное к $w = \sqrt{z}$. Оно является конформным и взаимно однозначным отображением области (см. рис. 48)

$$D_\alpha = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \arg w < \alpha\} \quad \text{с } 0 < \alpha \leq \pi$$

на область

$$G_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < 2\alpha\}.$$

Если же $\pi < \alpha < 2\pi$, то указанное отображение перестает быть взаимно однозначным — в образе “происходит наложение”. Точнее, отображение f остается конформным в каждой точке области D_α , однако уже не является взаимно однозначным отображением области D_α на $f(D_\alpha) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, поскольку некоторые точки

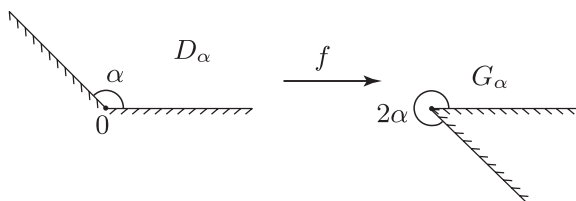


Рис. 48

области $f(D_\alpha)$ имеют два прообраза (“покрыты дважды”) — таковыми являются все точки z с $0 < \arg z < 2\alpha - \pi$. При $\alpha = 2\pi$, добавляя к области $D_{2\pi} = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ открытый луч $(0, +\infty)$, получаем конформное в каждой точке отображение области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, при котором каждая точка $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеет ровно два прообраза. Иначе можно сказать, что формула $z = f(w) = w^2$ задает конформное отображение области $\mathbb{C}_w \setminus \{0\}$ на некоторую “двулистную поверхность X над $\mathbb{C}_z \setminus \{0\}$ ”. Обратное отображение $w = \sqrt{z}$ конформно отображает X на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и, в частности, является однозначной функцией на X , к чему мы и стремились.

Указанную двулистную поверхность можно описать так: она склеена из двух экземпляров плоскости с разрезом $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ с помощью отождествления верхнего берега разреза первого экземпляра с нижним берегом разреза второго и, соответственно, нижнего берега первого разреза с верхним берегом второго (см. рис. 49). Действительно, возьмем в качестве первого экземпляра плоскости с разрезом $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ образ открытой верхней полуплоскости

$$D_\pi = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \arg w < \pi\}$$

при отображении $z = f(w) = w^2$, а в качестве второго экземпляра — образ открытой нижней полуплоскости

$$D_{2\pi} \setminus \overline{D}_\pi = \{w \in \mathbb{C} : \pi < \arg w < 2\pi\}$$

при том же отображении. Отображение $z = f(w) = w^2$ непрерывно на всей плоскости w , а указанной выше склейке берегов разрезов отвечает при этом отображении обычная склейка верхней и нижней полуплоскостей в плоскости w вдоль вещественной оси. Поэтому $z = f(w) = w^2$ конформно отображает плоскость w (без начала координат) на двулистную поверхность над плоскостью z

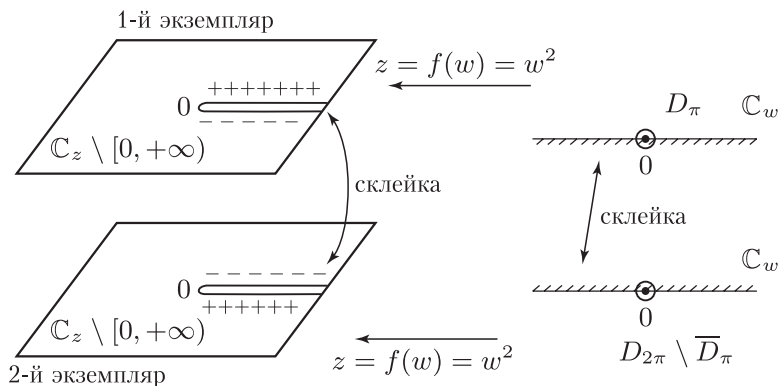


Рис. 49

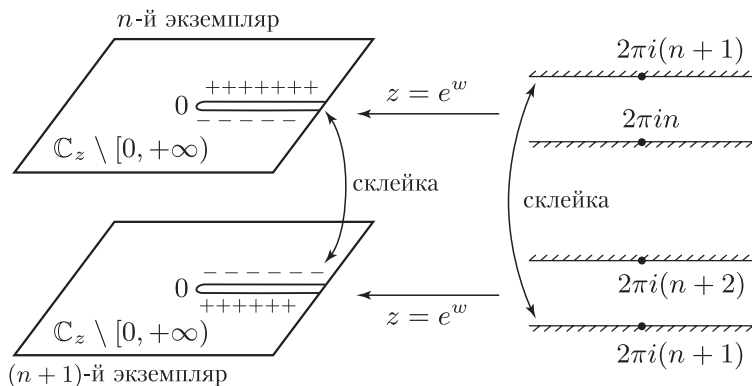


Рис. 50

(также без начала координат), полученную указанной склейкой, что и требовалось.

12.2. Риманова поверхность функции $w = \ln z$. Отображение $z = e^w$, обратное к $w = \ln z$, конформно отображает каждую из полос

$$D_n = \{w \in \mathbb{C} : 2\pi n < \operatorname{Im} w < 2\pi(n+1)\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

на плоскость с разрезом $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Так же как в п. 12.1 получаем, что $z = e^w$ конформно отображает всю плоскость \mathbb{C}_w на бесконечнолистную поверхность над $\mathbb{C}_z \setminus \{0\}$, склеенную из счетного числа экземпляров $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ с помощью отождествления (для каждого $n \in \mathbb{Z}$) верхнего берега разреза n -го экземпляра с нижним берегом разреза $(n+1)$ -го экземпляра (см. рис. 50). На полученной поверхности обратная функция $w = \ln z$ однозначна (и даже является конформным отображением этой поверхности на \mathbb{C}).

12.3. Риманова поверхность функции $w = \arcsin z$. Покажем, что функция $z = \sin w$, обратная к $w = \arcsin z$, конформно отображает полосу

$$D_0 := \left\{ w \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2} \right\}$$

на область $G := \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ и непрерывно отображает ∂D_0 на ∂G , причем луч $\{\operatorname{Re} w = \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} w \geq 0\}$ (соответственно луч $\{\operatorname{Re} w = \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} w \leq 0\}$) биективно отображается на верхний (соответственно нижний) берег разреза $[1, +\infty)$, а луч $\{\operatorname{Re} w = -\frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} w \geq 0\}$ (соответственно луч $\{\operatorname{Re} w = -\frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} w \leq 0\}$) — на верхний (соответственно нижний) берег разреза $(-\infty, -1]$ (см. рис. 51). Для этого запишем $\sin w = F_4 \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1(w)$, где

$$\begin{aligned} F_1(w) &= -ie^{iw}, & F_2(w_1) &= \frac{w_1 + 1}{w_1 - 1}, \\ F_3(w_2) &= w_2^2, & F_4(w_3) &= \frac{w_3 + 1}{w_3 - 1}. \end{aligned}$$

Последовательно выполняя отображения F_1, F_2, F_3, F_4 , мы получим конформные отображения D_0 на следующие области: нижнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w_1 < 0\}$, верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w_2 > 0\}$, всю плоскость переменного w_3 с выброшенным

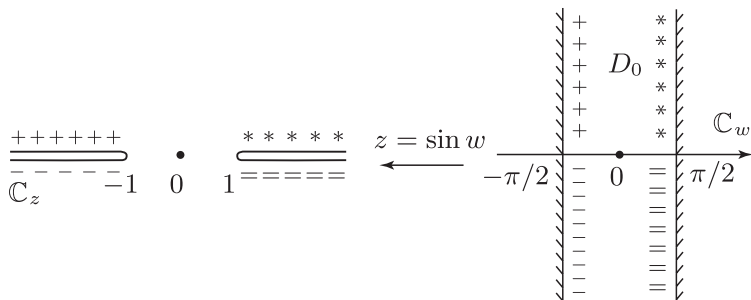


Рис. 51

лучом $\{\text{Im } w_3 = 0, \text{Re } w_3 > 0\}$ и, наконец, область G в плоскости z . Аналогично проверяется утверждение о соответствии границ.

Точно так же устанавливается, что при каждом $n \in \mathbb{Z}$ функция $z = \sin w$ конформно отображает полосу

$$D_n := \left\{ w \in \mathbb{C} : \pi n - \frac{\pi}{2} < \text{Re } w < \pi n + \frac{\pi}{2} \right\}$$

на ту же область $G = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ и непрерывно продолжается на замкнутую полосу \overline{D}_n , давая соответствие границ, подобное указанному выше.

В итоге получаем, что $z = \sin w$ есть конформное отображение области

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ \pi m + \frac{\pi}{2} : m \in \mathbb{Z} \right\}$$

на бесконечнолистную поверхность над $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, которая строится по следующему рецепту. Возьмем бесконечный набор

$$\{G_n : n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{экземпляров области } \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$$

(область G_n рассматривается при этом как образ области D_n при отображении $z = \sin w$). Склеим далее для каждого $k \in \mathbb{Z}$ экземпляры G_{2k} и G_{2k+1} “крест-накрест” (т.е. так же, как в п. 12.1) вдоль разреза $[1, +\infty)$, а экземпляры G_{2k} и G_{2k-1} — “крест-накрест” вдоль разреза $(-\infty, -1]$ (см. рис. 52). Многозначная функция $w = \arcsin z$ становится однозначной функцией на этой поверхности.

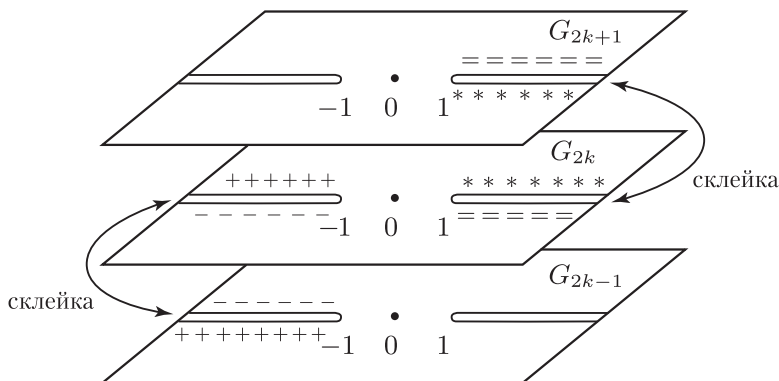


Рис. 52

12.4. Риманова поверхность аналитической функции.

Подчеркнем, что мы пока еще остаемся на уровне наводящих соображений. В случае произвольной аналитической функции мы не будем стремиться “сконструировать” искомую риманову поверхность из “наиболее крупных” кусков, склеенных вдоль их границ (как мы делали это в пп.12.1–12.3). Более удобно выстраивать ее из кругов, отвечающих каноническим элементам заданной аналитической функции.

По определению аналитическая функция \mathcal{F} представляет собой совокупность канонических элементов $F = (U, f)$, получаемых продолжением исходного элемента F_0 . Начиная с F_0 , будем строить продолжения по всем возможным цепочкам, склеивая при этом области определения U_1, U_2 “соседних” элементов $F_1 = (U_1, f_1)$ и $F_2 = (U_2, f_2)$ по их общей части $U_1 \cap U_2$. Иначе говоря, элементы $F_1 = (U_1, f_1)$ и $F_2 = (U_2, f_2)$ склеиваются друг с другом тогда и только тогда, когда

$$f_1 \equiv f_2 \quad \text{на } U_1 \cap U_2$$

(т.е. если F_1 есть НАП F_2). Если же $f_1 \neq f_2$ на $U_1 \cap U_2$ (но $U_1 \cap U_2$ по прежнему непусто), то мы будем считать, что элементы F_1, F_2 представляют два различных листа поверхности над множеством $U_1 \cap U_2$. Поясним это на примере функции \sqrt{z} (см. задачу в п. 10.2). Ее четыре канонических элемента $F_j = (U_j, f_j)$, $j = 0, 1, 2, 3$, должны склеиваться следующим образом: окрестность U_0 склеивается с окрестностью U_1 , U_1 склеивается с U_2 ,

U_2 — с U_3 . Последняя окрестность U_3 уже не склеивается с U_0 , а переносится на второй лист римановой поверхности над окрестностью U_0 .

Построенная риманова поверхность имеет над окрестностью каждой точки $z \in D$ столько листов, сколько элементов имеет \mathcal{F} над этой окрестностью. По построению \mathcal{F} поднимается до однозначной функции на построенной поверхности. Для аналитических функций \sqrt{z} , $\ln z$ и $\arcsin z$ указанная поверхность совпадает с поверхностями, построенными в пп. 12.1–12.3 с помощью конформных отображений.

12.5. Одномерные комплексные многообразия. Перейдем теперь к более формальному изложению начал теории римановых поверхностей. Для этого нам потребуется ввести несколько общих определений.

Начнем с определения одномерного комплексного многообразия — понятия, которое включает в себя как области на комплексной плоскости, так и построенные выше римановы поверхности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Пусть X есть хаусдорфово топологическое пространство. Предположим, что заданы покрытие X открытыми множествами U_α , $\alpha \in A$, и гомеоморфизмы

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow B_\alpha$$

на некоторые круги $B_\alpha \subset \mathbb{C}$, которые обладают следующим свойством. Если пересечение $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ непусто, то отображения

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \quad \text{и} \quad \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$$

являются голоморфными (на своей области определения), см. рис. 53. В этом случае будем говорить, что тройка $(X, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha\})$ задает на X структуру *одномерного комплексного многообразия*, покрытие $\{U_\alpha\}$ называется *атласом*, а гомеоморфизмы $\{\varphi_\alpha\}$ — (*локальными*) *картами*.

Иными словами, одномерное комплексное многообразие — это топологическое пространство, которое локально устроено как круг на комплексной плоскости. Примерами таких многообразий могут служить:

ПРИМЕРЫ. (1) Любая область $D \subset \mathbb{C}$ есть одномерное комплексное многообразие: атласом может служить любое семейство

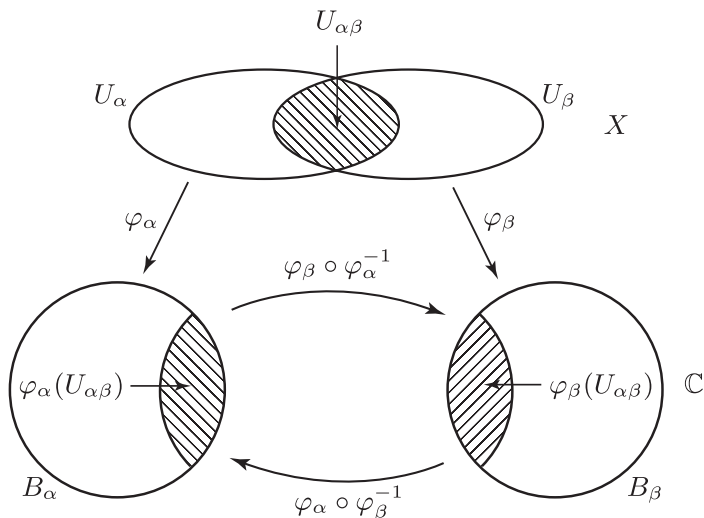


Рис. 53

открытых кругов $U_\alpha \subset D$, образующих покрытие D , а картами — функции $\varphi_\alpha(z) \equiv z$.

(2) Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ есть также одномерное комплексное многообразие. В качестве атласа можно взять в этом случае набор из двух открытых множеств

$$U_1 = \{|z| < 2\}, \quad U_2 = \left\{ |z| > \frac{1}{2} \right\} \cup \{\infty\},$$

а в качестве соответствующих карт — отображения

$$\varphi_1(z) = z, \quad \varphi_2(z) = \frac{1}{z}.$$

Определения голоморфных функций и голоморфных отображений на одномерных комплексных многообразиях получаются локализацией соответствующих определений для комплексной плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2. Пусть $(X, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha\})$ и $(Y, \{V_\beta\}, \{\psi_\beta\})$ — два одномерных комплексных многообразия. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *голоморфным*, если все отображения

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

голоморфны (на своей области определения). В частности, функция $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ называется *голоморфной*, если все ее композиции $f \circ \varphi_\alpha$, $\alpha \in A$, голоморфны. Если отображение $f: X \rightarrow Y$ голоморфно и биективно, а обратное к нему отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ голоморфно, то f называется *биголоморфным* отображением из X на Y .

Для областей на комплексной плоскости понятия голоморфной функции и голоморфного отображения совпадают с введенными выше; при этом биголоморфизм области $D_1 \subset \mathbb{C}$ на область $D_2 \subset \mathbb{C}$ есть не что иное, как взаимно однозначное конформное отображение D_1 на D_2 . В случае расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ интерес представляет прежде всего интерпретация голоморфности функций и отображений в окрестности ∞ . Приведенное выше общее определение голоморфности функций на комплексных многообразиях редуцируется в этом случае к определению, данному в п. 2.6, а именно, функция $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в окрестности ∞ в смысле определения 12.2 тогда и только тогда, когда она голоморфна в ∞ в смысле определения из п. 2.6 (оставляем проверку этого читателю). Отметим также, что голоморфное отображение произвольной области $D \subset \mathbb{C}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ есть не что иное, как мероморфная функция на D (см. определение в п. 7.11).

12.6. Неразветвленные голоморфные накрытия. Важным частным случаем голоморфных отображений являются голоморфные накрытия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.3. Отображение $\pi: X \rightarrow Y$ одномерных комплексных многообразий называется *неразветвленным голоморфным накрытием*, если пространство X линейно связно, отображение π голоморфно и сюръективно и для любого $z \in Y$ выполняется следующее условие: существуют окрестность $V = V(z)$ точки z в Y и семейство U_j , $j \in J$, *непересекающихся* открытых подмножеств X таких, что

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

и ограничение отображения π на любое из подмножеств U_j есть биголоморфизм U_j на V , $j \in J$ (см. рис. 54).

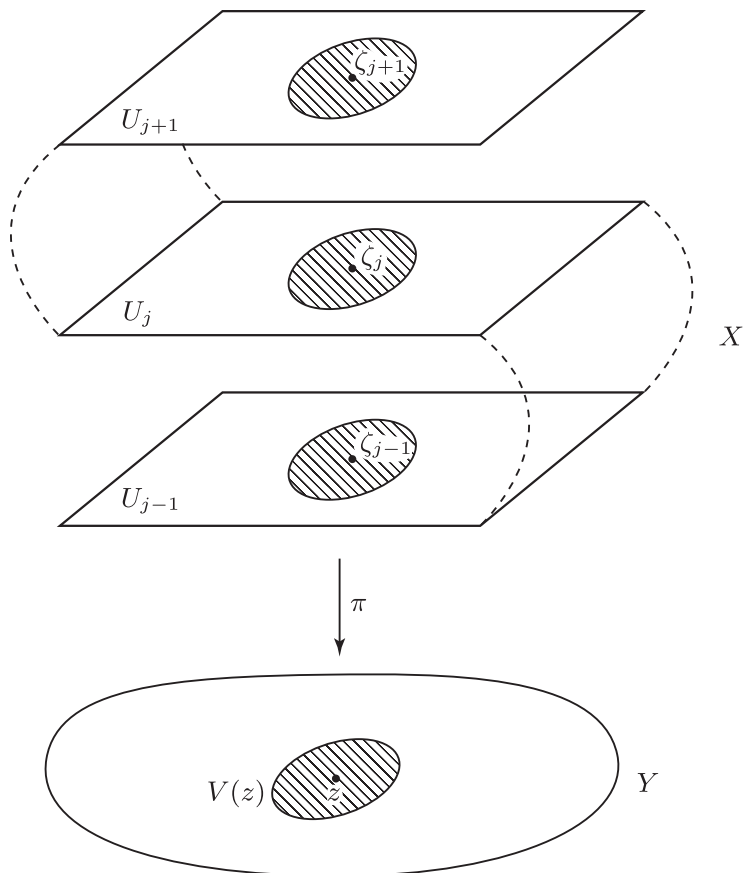


Рис. 54

Далее (см. следствие ниже) будет показано, что мощность множества $\pi^{-1}(z)$ одна и та же для всех $z \in Y$ (и равна мощности множества J). Она называется *числом листов* накрытия π .

Примерами неразветвленных голоморфных накрытий могут служить экспонента $z \mapsto e^z$, которая является неразветвленным голоморфным накрытием $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и степенные функции $z \mapsto z^n$, $n = 1, 2, \dots$, задающие неразветвленные голоморфные накрытия $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Задача. Определим голоморфное локально обратимое отображение $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ формулой $\pi(z) = \exp(\exp z)$. Покажите, что точка $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеет окрестность V со свойствами, указанными в определении 12.3, тогда и только тогда, когда $w \neq 1$. Иными словами, отображение $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ не является неразветвленным голоморфным накрытием, но его сужение $\pi_1: \mathbb{C} \setminus \pi^{-1}(1) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ уже является таковым.

Для неразветвленных голоморфных накрытий естественно ввести следующее понятие эквивалентности накрытий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.4. Пусть $\pi: X \rightarrow Y$ и $\sigma: Z \rightarrow Y$ — два неразветвленных голоморфных накрытия. Отображение $f: X \rightarrow Z$ называется *послойным изоморфизмом*, если оно биголоморфно и $\sigma \circ f = \pi$ (т.е. f переводит слои отображения π в слои отображения σ).

Например, отображения

$$f_k: z \mapsto f_k(z) = z + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z},$$

задают послойные изоморфизмы накрытия

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto e^z,$$

на себя, а отображения

$$g_k: z \mapsto g_k(z) = \alpha^k z, \quad \text{где } \alpha = e^{2\pi i/n} \text{ и } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

— послойные изоморфизмы накрытия

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto z^n,$$

на себя.

Основным свойством голоморфных неразветвленных накрытий $\pi: X \rightarrow Y$, которое многократно используется ниже, является

возможность (однозначно определенного) поднятия путей с базы накрытия Y на пространство X , точнее, имеет место следующая

ТЕОРЕМА О ПОДНЯТИИ ПУТЕЙ. Пусть $\pi: X \rightarrow Y$ — голоморфное неразветвленное накрытие. Тогда для любой точки $z_0 \in Y$, любого непрерывного пути $\gamma: I \rightarrow Y$ с началом в точке z_0 и любой точки $\zeta_0 \in \pi^{-1}(z_0)$ существует единственный непрерывный путь $\tilde{\gamma}: I \rightarrow X$ с началом в точке ζ_0 такой, что (см. рис. 55):

$$\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t) \quad \text{для всех } t \in I.$$

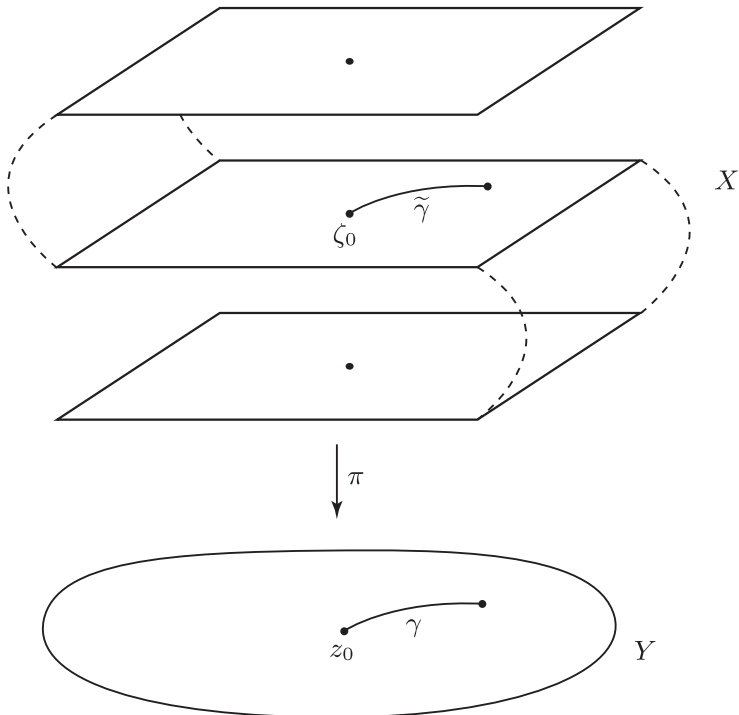


Рис. 55

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование. Фактически повторяет рассуждение из доказательства теоремы о существовании пер-

вообразной вдоль пути (см. п. 4.5). Из покрытия $\gamma(I)$ окрестностями $V(z)$, $z \in \gamma(I)$ (см. определение 12.3 выше) можно выбрать конечное подпокрытие V_0, V_1, \dots, V_{n-1} и, тем самым, найти разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ отрезка I такое, что

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset V_{j-1} \quad \text{при } j = 1, \dots, n.$$

На первом отрезке $[t_0, t_1]$ определим отображение $\tilde{\gamma}$ как

$$\tilde{\gamma} := \pi^{-1} \circ \gamma,$$

где $\pi^{-1}: V_0 \rightarrow U_{j_0}^0$ есть гомеоморфизм V_0 на то из непересекающихся открытых множеств U_j^0 , $j \in J_0$, в разложении

$$\pi^{-1}(V_0) = \bigcup_{j \in J_0} U_j^0,$$

которое содержит ζ_0 . На следующем отрезке $[t_1, t_2]$ определим $\tilde{\gamma}$ как $\pi^{-1} \circ \gamma$, где $\pi^{-1}: V_1 \rightarrow U_{j_1}^1$ есть гомеоморфизм V_1 на то из непересекающихся открытых множеств U_j^1 , $j \in J_1$, в разложении

$$\pi^{-1}(V_1) = \bigcup_{j \in J_1} U_j^1,$$

которое содержит $\tilde{\gamma}(t_1)$. Далее продолжим построение по индукции.

Единственность. Пусть $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ — два поднятия пути γ с $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0) = \zeta_0$. Тогда множество

$$G := \{t \in I : \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)\}$$

непусто, ибо содержит 0, и замкнуто ввиду непрерывности $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$. Оно также открыто, поскольку в окрестности любой точки $t_0 \in G$ имеем: $\tilde{\gamma}_1 = \pi^{-1} \circ \gamma$ и $\tilde{\gamma}_2 = \pi^{-1} \circ \gamma$, где $\pi^{-1}: V \rightarrow U_j$ — биекция на то из множеств U_j в разложении

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} U_j,$$

которое содержит $\tilde{\gamma}_1(t_0) = \tilde{\gamma}_2(t_0)$. Следовательно, $G = I$, что и требовалось доказать. ■

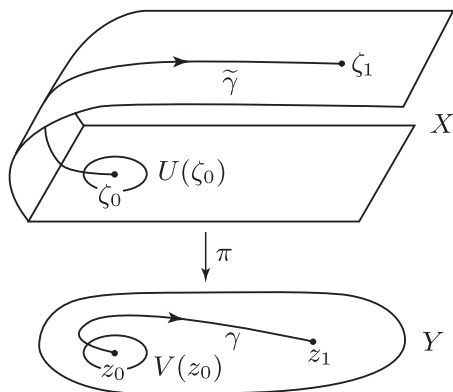


Рис. 56

СЛЕДСТВИЕ. *Мощность множества $\pi^{-1}(z)$ одна и та же для всех $z \in Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через z_0, z_1 две произвольные точки из Y . В силу линейной связности Y существует путь $\gamma: I \rightarrow Y$ с $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1$. Сопоставим каждой точке $\zeta_0 \in \pi^{-1}(z_0)$ конечную точку $\zeta_1 := \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(z_1)$ поднятия $\tilde{\gamma}$ пути γ , проходящего через точку $\tilde{\gamma}(0) = \zeta_0$ (см. рис. 56). Определенное таким образом отображение

$$\pi^{-1}(z_0) \rightarrow \pi^{-1}(z_1), \quad \zeta_0 \mapsto \zeta_1,$$

инъективно в силу единственности поднятия. Оно также сюръективно, поскольку z_0 и z_1 можно поменять местами. Следовательно, указанное отображение взаимно однозначно. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть, в условиях теоремы, $Y = D$ есть некоторая область на \mathbb{C} и $\Phi: X \rightarrow \mathbb{C}$ — произвольная голоморфная функция на многообразии X . Определим композицию $\Phi \circ \pi^{-1}$ как аналитическую функцию на D , задаваемую следующим образом. Выберем точку $z_0 \in D$ и ее прообраз $\zeta_0 \in \pi^{-1}(z_0)$, а также окрестность $V(z_0) \subset D$ как в определении накрытия. Пусть $U(\zeta_0)$ — та из окрестностей U_j в разложении

$$\pi^{-1}(V(z_0)) = \bigcup_{j \in J} U_j,$$

которая содержит ζ_0 (и гомеоморфно проектируется на $V(z_0)$). Возьмем в качестве исходного элемента $\Phi \circ \pi^{-1}$ с центром в точке z_0 пару $(V(z_0), f)$, где функция $f \in \mathcal{O}(V(z_0))$ задается равенством

$$f(\pi(\zeta)) = \Phi(\zeta) \quad \text{для всех } \zeta \in U(\zeta_0).$$

Для любого пути $\gamma: I \rightarrow D$ с началом в точке z_0 рассмотрим его поднятие $\tilde{\gamma}: I \rightarrow X$ с началом в точке ζ_0 и для каждого $t \in I$ положим

$$F_t := \Phi \circ \pi^{-1} \Big|_{V(\gamma(t))} = \Phi \Big|_{U(\tilde{\gamma}(t))},$$

где $U(\tilde{\gamma}(t))$ — окрестность точки $\tilde{\gamma}(t)$, гомеоморфно проектирующаяся на $V(\gamma(t))$. Тогда семейство $\{F_t : t \in I\}$ задает аналитическое продолжение исходного элемента вдоль пути γ . Совокупность элементов, получаемых всевозможными продолжениями такого рода (для любого выбора начальных точек z_0 и ζ_0), представляет собой *одну* аналитическую функцию на D (это доказывается как в замечании п. 11.4) и обозначается через $\Phi \circ \pi^{-1}$.

12.7. Риманова поверхность аналитической функции (продолжение). В этом параграфе излагается подход Римана к многозначным аналитическим функциям, а именно, для заданной аналитической функции \mathcal{F} будет построена ее риманова поверхность, на которой \mathcal{F} реализуется как *однозначная голоморфная функция*.

Итак, пусть \mathcal{F} — аналитическая функция в области D на комплексной плоскости, заданная множеством своих канонических элементов. Искомая риманова поверхность представляет собой одномерное комплексное многообразие $R(\mathcal{F})$, накрывающее D , к построению которого мы переходим.

Точками множества $R(\mathcal{F})$ являются, по определению, канонические элементы F , составляющие аналитическую функцию \mathcal{F} . Определим отображение $\pi_{\mathcal{F}}: R(\mathcal{F}) \rightarrow D$, сопоставляющее каждому каноническому элементу $F \in \mathcal{F}$ его центр $a = \pi_{\mathcal{F}}(F) \in D$. В дальнейшем мы часто пишем просто π вместо $\pi_{\mathcal{F}}$.

Введем *топологию* на множестве $R(\mathcal{F})$, превращающую его в топологическое пространство. Для этого определим ε -окрестность $B_{\varepsilon}(F_0)$ элемента $F_0 \in \mathcal{F}$ для произвольного $\varepsilon > 0$ как множество всех $F \in \mathcal{F}$ таких, что

$$|\pi(F) - \pi(F_0)| < \varepsilon \quad \text{и } F \text{ есть НАП } F_0.$$

Данные окрестности корректно определяют топологию на $R(\mathcal{F})$ (подмножество $R(\mathcal{F})$ открыто в этой топологии, если с каждой своей точкой оно содержит ее окрестность указанного вида).

Построим теперь атлас координатных окрестностей и локальные карты на $R(\mathcal{F})$. Обозначим через A множество всех пар вида $\alpha = (F, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, $F \in R(\mathcal{F})$, таких что

круг $\{z \in \mathbb{C} : |z - \pi(F)| < \varepsilon\}$ содержится в D .

Положим для любого $\alpha = (F, \varepsilon) \in A$:

$$U_\alpha := B_\varepsilon(F), \quad \varphi_\alpha := \pi|_{U_\alpha}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тройка $(\mathcal{F}, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha\})$ задает на $R(\mathcal{F})$ структуру одномерного комплексного многообразия, называемого римановой поверхностью аналитической функции \mathcal{F} . Отображение $\pi_{\mathcal{F}}: R(\mathcal{F}) \rightarrow D$ является неразветвленным голоморфным накрытием, а функция $\Phi_{\mathcal{F}}: R(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{C}$, сопоставляющая каждому каноническому элементу $F = (U, f) \in \mathcal{F}$ число

$$\Phi_{\mathcal{F}}(F) = f(\pi_{\mathcal{F}}(F)) = \text{значение } f \text{ в центре } F,$$

голоморфна на $R(\mathcal{F})$ и выполняется равенство

$$\mathcal{F} = \Phi_{\mathcal{F}} \circ \pi_{\mathcal{F}}^{-1}.$$

Композиция $\Phi_{\mathcal{F}} \circ \pi_{\mathcal{F}}^{-1}$ понимается в смысле замечания из п. 12.6. Иными словами, для каждой ветви (G, f) функции \mathcal{F} существует единственная область $\tilde{G} \subset R(\mathcal{F})$ такая, что $\pi_{\mathcal{F}}$ гомеоморфно отображает \tilde{G} на G и

$$f = \Phi_{\mathcal{F}} \circ \pi_{\mathcal{F}}^{-1} \quad \text{на } G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОРРЕКТНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. 1) Хаусдорфовость топологии на $R(\mathcal{F})$. Пусть $F_1 = (U_1, f_1)$ и $F_2 = (U_2, f_2)$ — два различных элемента аналитической функции \mathcal{F} . Если $\pi(F_1) \neq \pi(F_2)$, то выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $|\pi(F_1) - \pi(F_2)| > 2\varepsilon$. Тогда множества $B_\varepsilon(F_1)$ и $B_\varepsilon(F_2)$ не пересекаются (поскольку не пересекаются их проекции). Если же $\pi(F_1) = \pi(F_2) = a$, то выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы круг $\{|z - a| < \varepsilon\}$ содержался

в пересечении $U_1 \cap U_2$. Если $B_\varepsilon(F_1)$ и $B_\varepsilon(F_2)$ имеют общий элемент $F = (U, f)$ с центром b , то множество $U \cap U_1 \cap U_2$ непусто (содержит b) и, следовательно, F_1 есть НАП F_2 по свойству треугольника (см. п. 10.3(B)). Но канонические элементы F_1, F_2 имеют общий центр и потому должны совпадать, что противоречит предположению.

2) $\pi: R(\mathcal{F}) \rightarrow D$ есть неразветвленное накрытие. Пусть $z_0 \in D$. Рассмотрим все элементы $F_j \in \mathcal{F}$, $j \in J$, с $\pi(F_j) = z_0$. Положим $V := \{|z - z_0| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ выбрано так, чтобы круг $\{|z - z_0| < 2\varepsilon\}$ содержался в D и множества $B_\varepsilon(F_j)$ попарно не пересекались. Тогда

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} B_\varepsilon(F_j).$$

Действительно, если элемент $F = (U, f) \in \pi^{-1}(V)$, то это означает, что $z_0 \in U$. Поэтому ряд Тейлора функции f можно переразложить в точке z_0 , получив элемент аналитической функции \mathcal{F} с центром в точке z_0 , т.е. один из элементов F_j . Следовательно, F есть НАП F_j , откуда $F \in B_\varepsilon(F_j)$. Положим

$$U_j := \pi^{-1}(V) \cap B_\varepsilon(F_j).$$

Тогда открытые множества U_j будут обладать свойствами, перечисленными в определении неразветвленного накрытия из п. 12.6.

3) *Свойства функции $\Phi_{\mathcal{F}}$.* В координатной окрестности $U_\alpha := B_\varepsilon(F_0)$ точки $F_0 = (U_0, f_0)$ с картой $\varphi_\alpha := \pi|_{U_\alpha}$ имеем равенство

$$\Phi_{\mathcal{F}} \circ \varphi_\alpha^{-1}(z) = f_0(z),$$

откуда следует голоморфность $\Phi_{\mathcal{F}}$ и равенство $\mathcal{F} = \Phi_{\mathcal{F}} \circ \pi^{-1}$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. При изучении рядов Пуансо в п. 11.8 мы по существу построили одну из реализаций римановой поверхности функции $(z - a)^{1/n}$ (или даже любой аналитической функции в проколотой окрестности точки a , не имеющей в этой окрестности особенностей, кроме точки ветвления n -го порядка при $z = a$). Действительно, предложение из п. 11.8 утверждает, что всякая аналитическая функция \mathcal{F} на области $V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$, имеющая a точкой ветвления n -го порядка, поднимается до некоторой однозначной функции Φ на неразветвленное голоморфное накрытие $\pi: v \rightarrow V$ (где $v = \{\zeta \in \mathbb{C} : 0 < |\zeta| < \varepsilon^{1/n}\}$ и $\pi(\zeta) = a + \zeta^n$)

в том смысле, что выполняется равенство $\mathcal{F} = \Phi \circ \pi^{-1}$ аналитических функций на V . Фиксируем точку $\zeta_0 \in v$ и обозначим через F_0 один из n канонических элементов аналитической функции \mathcal{F} с центром $\pi(\zeta_0)$, после чего сопоставим каждой точке $\zeta \in v$ канонический элемент, полученный продолжением F_0 вдоль пути $\pi \circ \gamma$, где $\gamma: I \rightarrow v$ — произвольный путь, соединяющий ζ_0 с ζ . (Независимость этого продолжения от выбора γ вытекает из определения точки ветвления n -го порядка.) Получим послойный изоморфизм $J: v \rightarrow R(\mathcal{F})$ неразветвленных голоморфных накрытий $\pi: v \rightarrow V$ и $\pi_{\mathcal{F}}: R(\mathcal{F}) \rightarrow V$ над областью V , что и позволяет отождествить v с римановой поверхностью аналитической функции \mathcal{F} .

В п. 11.8 было также отмечено, что поднятие $\mathcal{F}(z)$ на накрытие $\pi: v \rightarrow V$ до однозначной функции $\Phi(\zeta)$ не единственно, так как биголоморфизм

$$f_k: \zeta \mapsto f_k(\zeta) := \alpha^k \zeta, \quad \text{где } \alpha := e^{2\pi i/n}, k \in \{1, \dots, n-1\},$$

удовлетворяет условию $\pi = \pi \circ f_k$ (т.е. является послойным) и переводит поднятие $\Phi(\zeta)$ функции \mathcal{F} в другое поднятие $\Psi(\zeta) = \Phi(\alpha^k \zeta)$. Поэтому поднятие \mathcal{F} до однозначной функции на данное накрытие $\pi: v \rightarrow V$ единственно лишь с точностью до композиции с послойными изоморфизмами этого накрытия.

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ПОДНЯТИЯ ДО ОДНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ. Более общим образом, предположим, что аналитическая функция \mathcal{F} , заданная на области $D \subset \mathbb{C}$, поднимается на некоторое накрытие $\tau: Y \rightarrow D$ до однозначной функции Φ (напомним еще раз, что это эквивалентно равенству $\mathcal{F} = \Phi \circ \tau^{-1}$ аналитических функций на D), и пусть $\sigma: X \rightarrow Y$ — произвольное накрытие над Y . (В частности, в качестве σ можно взять любое биголоморфное отображение, рассматривая его как накрытие с числом листов, равным 1.) Тогда

$$\tau \circ \sigma: X \rightarrow D$$

есть накрытие над D и ясно, что \mathcal{F} поднимается на него до однозначной функции $\Phi \circ \sigma$.

Следующая теорема (которую мы приводим без доказательства) показывает, что с точностью до указанных композиций накрытий над накрытиями поднятие данной аналитической функции до однозначной функции определяется единственным образом.

ТЕОРЕМА. Пусть X есть одномерное комплексное многообразие и $p: X \rightarrow D$ — неразветвленное голоморфное накрытие над областью D . Предположим, что аналитическая функция \mathcal{F} в области D поднимается до голоморфной функции $\Psi: X \rightarrow \mathbb{C}$ на X , т.е. что

$$\mathcal{F} = \Psi \circ p^{-1}.$$

Тогда существует неразветвленное голоморфное накрытие $\sigma: X \rightarrow R(\mathcal{F})$ такое, что

$$p = \pi_{\mathcal{F}} \circ \sigma \quad \text{и} \quad \Psi = \Phi_{\mathcal{F}} \circ \sigma.$$

Из приведенной теоремы вытекает, что построенная выше риманова поверхность $R(\mathcal{F})$ имеет наименьшее число листов среди всевозможных одномерных комплексных многообразий, являющихся накрытиями области D , на которые \mathcal{F} поднимается до однозначной голоморфной функции. Другим следствием этой теоремы является утверждение о единственности поднятия \mathcal{F} до однозначной функции на накрытие $\pi_{\mathcal{F}}: R(\mathcal{F}) \rightarrow D$ с точностью до послонных изоморфизмов этого накрытия.

Задачи. (1) Покажите, что риманова поверхность функции $\operatorname{arctg} z$ над $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm i\}$ будет послонно изоморфна римановой поверхности логарифма над $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, если отождествить $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm i\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ с помощью надлежащего конформного отображения.

(2) Отождествите накрытие $\pi_1: \mathbb{C} \setminus \pi^{-1}(1) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ из задачи п. 12.6 с римановой поверхностью функции $\ln \ln z$.

(3) Можно ли установить послонный изоморфизм между римановыми поверхностями функций $\mathcal{F}_1(z) = \ln \ln z$ и $\mathcal{F}_2(z) = \ln\{z(z-1)\}$, рассматриваемыми как накрытия над $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$?

Список литературы

- [1] Гурвиц А., Курант Р., *Теория функций*. — М.: Наука, 1968, первое издание 1922.
- [2] Поля Г., Серё Г., *Задачи и теоремы из анализа*. — М.: Наука, 1978, первое издание 1925.
- [3] Привалов И. И., *Введение в теорию функций комплексного переменного*. — М.: Наука, 1984, первое издание 1934.
- [4] Маркушевич А. И., *Теория аналитических функций*. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1968, первое издание 1950.
- [5] Волковысский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г., *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*. — М.: Наука, 1970, первое издание 1960.
- [6] Картан А., *Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных*. — М.: ИЛ, 1963, первое издание 1961.
- [7] Евграфов М. А., *Аналитические функции*. — М.: Наука, 1991, первое издание 1965.
- [8] Rudin W., *Real and complex analysis*. — New York: McGraw-Hill, 1987, первое издание 1966.
- [9] Шабат Б. В., *Введение в комплексный анализ. Часть 1. Функции одного переменного*. — М.: Наука, 1985, первое издание 1968.
- [10] Евграфов М. А. (ред.), *Сборник задач по теории аналитических функций*. — М.: Наука, 1972, первое издание 1969.

Учебное издание

А. В. Домрин, А. Г. Сергеев

**Лекции по комплексному анализу
Часть I. Первое полугодие**

Ответственный за выпуск *А. Д. Изаак*
Компьютерная верстка и рисунки *О. Г. Мисюриной*

Сдано в набор 21.06.2004. Подписано в печать 20.10.2004.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 11,0. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/spm/> e-mail: spm@mi.ras.ru