

Контрольная № 7
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

Вариант 1

Задача 1. Методом Лагранжа привести билинейную симметрическую форму

$$\varphi(x, y) = 4x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 - 2x^1y^2 - 2x^2y^1 + 2x^2y^3 + 2x^3y^2 - \frac{3}{2}x^2y^3 - \frac{3}{2}x^3y^2$$

к нормальному виду.

Задача 2. Найти матрицу C линейного преобразования, приводящего симметрическую билинейную форму $\varphi(x, y)$ из предыдущей задачи к нормальному виду и сделать проверку, вычислив $C^T B \varphi C$.

Задача 3. Найти базис в правом и левом ядрах билинейной формы

$$\varphi(x, y) = x^1y^1 - x^2y^2 + x^1y^2 - x^2y^1.$$

Совпадают ли эти ядра?

Задача 4. Приведите пример псевдоевклидова векторного пространства и изотропного вектора в нём.

Задача 5. Докажите, что если симметрическая билинейная форма с матрицей A положительно определена, то и симметрическая билинейная форма с матрицей A^{-1} тогда тоже положительно определена.

Контрольная № 7
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

Вариант 2

Задача 1. Методом Лагранжа привести квадратичную форму

$$\gamma(x) = x^1x^2 - 2x^1x^3 + 6x^2x^3$$

к нормальному виду.

Задача 2. Найти матрицу C линейного преобразования, приводящего квадратичную форму $\gamma(x)$ из предыдущей задачи к нормальному виду и сделать проверку, вычислив $C^T B \gamma C$.

Задача 3. Существует ли линейное преобразование, переводящее квадратичную форму

$$2(x^1)^2 + 9(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 8x^1x^2 - 4x^1x^3 - 10x^2x^3$$

в квадратичную форму

$$5(y^1)^2 + 6(y^2)^2 + 12y^1y^2?$$

Задача 4. Приведите пример псевдоунитарного векторного пространства и изотропного вектора в нём.

Задача 5. Докажите, что симметрическая билинейная форма тогда и только тогда отрицательно определена, когда знаки главных угловых миноров чередуются, и самый первый из них отрицательный.

Контрольная № 7
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

Вариант 3

Задача 1. Методом Лагранжа привести билинейную симметрическую форму

$$\varphi(x, y) = 4x^2y^2 + x^3y^3 + \frac{3}{2}x^1y^3 + \frac{3}{2}x^3y^1 - 2x^2y^3 - 2x^3y^2$$

к нормальному виду.

Задача 2. Найти матрицу C линейного преобразования, приводящего симметрическую билинейную форму $\varphi(x, y)$ из предыдущей задачи к нормальному виду и сделать проверку, вычислив $C^T B \varphi C$.

Задача 3. Является ли невырожденной квадратичная форма

$$5(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 - 2x^2x^3?$$

Если да, является ли она положительно определённой?

Задача 4. Приведите пример такого двумерного псевдоевклидова векторного пространства V и подпространства $W \subset V$, что $W^\perp = W$.

Задача 5. Пусть γ — квадратичная форма на вещественном линейном пространстве, а a и b такие векторы, что $\gamma(a) > 0$ и $\gamma(b) < 0$. Доказать, что a и b линейно независимы.