

**Контрольная № 7**  
**Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015**

**Вариант 1**

**Задача 1.** Методом Лагранжа привести билинейную симметрическую форму

$$\varphi(x, y) = 4x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 - 2x^1y^2 - 2x^2y^1 + 2x^2y^3 + 2x^3y^2 - \frac{3}{2}x^2y^3 - \frac{3}{2}x^3y^2$$

к нормальному виду.

**Задача 2.** Найти матрицу  $C$  линейного преобразования, приводящего симметрическую билинейную форму  $\varphi(x, y)$  из предыдущей задачи к нормальному виду и сделать проверку, вычислив  $C^T B \varphi C$ .

**Задача 3.** Найти базис в правом и левом ядрах билинейной формы

$$\varphi(x, y) = x^1y^1 - x^2y^2 + x^1y^2 - x^2y^1.$$

Совпадают ли эти ядра?

**Задача 4.** Приведите пример псевдоевклидова векторного пространства и изотропного вектора в нём.

**Задача 5.** Докажите, что если симметрическая билинейная форма с матрицей  $A$  положительно определена, то и симметрическая билинейная форма с матрицей  $A^{-1}$  тогда тоже положительно определена.

**Контрольная № 7**  
**Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015**

**Вариант 2**

**Задача 1.** Методом Лагранжа привести квадратичную форму

$$\gamma(x) = x^1x^2 - 2x^1x^3 + 6x^2x^3$$

к нормальному виду.

**Задача 2.** Найти матрицу  $C$  линейного преобразования, приводящего квадратичную форму  $\gamma(x)$  из предыдущей задачи к нормальному виду и сделать проверку, вычислив  $C^T B \gamma C$ .

**Задача 3.** Существует ли линейное преобразование, переводящее квадратичную форму

$$2(x^1)^2 + 9(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 8x^1x^2 - 4x^1x^3 - 10x^2x^3$$

в квадратичную форму

$$5(y^1)^2 + 6(y^2)^2 + 12y^1y^2?$$

**Задача 4.** Приведите пример псевдоунитарного векторного пространства и изотропного вектора в нём.

**Задача 5.** Докажите, что симметрическая билинейная форма тогда и только тогда отрицательно определена, когда знаки главных угловых миноров чередуются, и самый первый из них отрицательный.

**Контрольная № 7**  
**Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015**

**Вариант 3**

**Задача 1.** Методом Лагранжа привести билинейную симметрическую форму

$$\varphi(x, y) = 4x^2y^2 + x^3y^3 + \frac{3}{2}x^1y^3 + \frac{3}{2}x^3y^1 - 2x^2y^3 - 2x^3y^2$$

к нормальному виду.

**Задача 2.** Найти матрицу  $C$  линейного преобразования, приводящего симметрическую билинейную форму  $\varphi(x, y)$  из предыдущей задачи к нормальному виду и сделать проверку, вычислив  $C^T B \varphi C$ .

**Задача 3.** Является ли невырожденной квадратичная форма

$$5(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 - 2x^2x^3?$$

Если да, является ли она положительно определённой?

**Задача 4.** Приведите пример такого двумерного псевдоевклидова векторного пространства  $V$  и подпространства  $W \subset V$ , что  $W^\perp = W$ .

**Задача 5.** Пусть  $\gamma$  — квадратичная форма на вещественном линейном пространстве, а  $a$  и  $b$  такие векторы, что  $\gamma(a) > 0$  и  $\gamma(b) < 0$ . Доказать, что  $a$  и  $b$  линейно независимы.