Задачи для семинара № 16
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

(Псевдо)евклидовы и (псевдо)унитарные пространства. Ортогонализация по Граму-Шмидту, критерий Сильвестра, теорема Якоби

Задача 1. При помощи критерия Сильвестра выяснить, при каких α квадратичная форма

$$5(x^1)^2 + (x^2)^2 + \alpha(x^3)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 - 2x^2x^3$$

положительно определена.

Задача 2. Проверить невырожденность и с помощью теоремы Якоби найти сигнатуру квадратичной формы

$$(x^1)^2 + 2x^1x^2 + 2x^2x^3 + 2x^1x^3.$$

Задача 3. Найти длину вектора $(1, 1+i, 1-i)$ унитарного пространства $\mathbb{C}^3$.

Задача 4. Проверить ортогональность пары векторов

$$(1, -i, 1+i), \quad (1+i, -1+i, 0)$$

унитарного пространства $\mathbb{C}^3$ и дополнить до ортогонального базиса всего пространства.

Задача 5. С помощью ортогонализации по Граму-Шмидту построить ортогональный базис подпространства евклидова пространства $\mathbb{R}^4$, порождённого векторами

$$(1, -1, -1, -1), \quad (5, -2, 0, -1), \quad (3, 4, 2, 1), \quad (4, -1, 1, 0).$$

Задача 6. Доказать, что у положительно определённой квадратичной формы все коэффициенты при квадратах положительны, но это условие не является достаточным для положительной определённости квадратичной формы.

Задача 7. Найти базис ортогонального дополнения $W^{\perp}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ к подпространству W, порождённому векторами

$$(1, 2, 0, -1), \quad (0, -1, 1, 3), \quad (3, 4, 2, 3).$$

Задача 8. Теорема Пифагора: доказать, что если векторы x и y в евклидовом или эрмитовом пространстве ортогональны, то

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

Верно ли обратное утверждение?

Задача 9. Пусть векторы b_k получены из системы векторов a_k, $k = 1, \ldots, n$, ортогонализацией (без последующего нормирования). Доказать, что ортогонализация не увеличивает длину векторов, то есть $|b_k| \leqslant |a_k|$ для всех k.

Задача 10. Даны многочлены x^2 и x^4. Найти их длины и угол между ними в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 4 со скалярным произведением, заданным формулой

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$