

**Задачи для семинара № 17**  
**Геометрия-1**  
**Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015**

**Евклидовы векторные и аффинные пространства,  
ортогональные и унитарные операторы,  
самосопряжённые операторы, канонический вид.**

**Задача 1.** Найти угол между вектором  $v = (4, -8, 0, 1)$  и подпространством  $W = \langle (-1, 1, 2, 3), (2, 0, 1, 1) \rangle$  в евклидовом векторном пространстве  $\mathbb{R}^4$  со стандартным скалярным произведением.

**Задача 2.** Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Задача 3.** Найти канонический вид и соответствующий унитарный базис самосопряжённого оператора, заданного в некотором унитарном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}.$$

**Задача 4.** Найти матрицу ортогонального проектора на подпространство евклидова аффинного пространства  $\mathbb{R}^4$  со стандартным скалярным произведением, заданное уравнениями  $x^1 + x^2 + x^3 = 0$ ,  $x^4 = 0$ .

**Задача 5.** Найти полярное разложение оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & i \\ 2i & -1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 6.** Двумерная плоскость  $\pi \subset \mathbb{R}^4$  евклидова аффинного пространства  $\mathbb{R}^4$  со стандартным скалярным произведением проходит через точки

$$A = (1, 1, 1, 1), \quad B = (2, 2, 0, 0), \quad C = (1, 2, 0, 1),$$

а прямая  $l$  через точки  $D = (1, 1, 1, 2)$ ,  $E = (1, 1, 2, 1)$ . Найти уравнения общего перпендикуляра  $\pi$  и  $l$  и его длину.

**Задача 7.** Найти канонический вид и соответствующий унитарный базис унитарного оператора, заданного в некотором унитарном базисе матрицей

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 8.** Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис самосопряжённого оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Задача 9.** Доказать, что два самосопряжённых оператора коммутируют тогда и только тогда, когда существует ортонормированный (унитарный) базис, в котором оба оператора диагонализуются.

**Задача 10.** Докажите, что формулы Кэли

$$U = (Id + iF)(Id - iF)^{-1}, \quad F = i(Id - U)(Id + U)^{-1}$$

дают взаимно однозначное соответствие между множеством всех эрмитовых операторов  $F$  и множеством всех унитарных операторов  $U$ , не имеющих  $-1$  среди своих собственных значений.