

Задачи для семинара № 15
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

Симметрические, кососимметрические и эрмитовы формы

Задача 1. Записать кососимметрическую билинейную форму

$$\varphi(x, y) = x^1 y^2 - x^2 y^1 + 2x^1 y^3 - 2x^3 y^1 - x^1 y^4 + x^4 y^1 + 4x^2 y^4 - 4x^4 y^2 + x^3 y^4 - x^4 y^3$$

в базисе $\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j$, $i < j$, и привести к нормальной форме с нахождением матрицы соответствующего линейного преобразования. Сделайте проверку: убедитесь, что $C^T B \varphi C$ действительно имеет нормальный вид.

Задача 2. Привести эрмитову полуторалинейную форму

$$\varphi(x, y) = x^1 \bar{y}^1 + 9x^2 \bar{y}^2 + 9x^3 \bar{y}^3 + 3ix^1 \bar{y}^2 - 3ix^2 \bar{y}^1 - 3x^1 \bar{y}^3 - 3x^3 \bar{y}^1 + 7ix^2 \bar{y}^3 - 7ix^3 \bar{y}^2$$

к нормальной форме. Не забывайте, что для эрмитовых форм мы в ходе алгоритма дополняем не до квадрата, а до выражения $l(x)\overline{l(y)}$, где $l(x)$ — линейная функция.

Задача 3. Невырождены ли следующие квадратичные формы:

$$x^1 x^2 + x^2 x^3 + x^3 x^1, \quad (x^1)^2 + 2x^1 x^2 + 2(x^2)^2 + 4x^2 x^3 + 5(x^3)^2?$$

Если да, выясните с помощью критерия Сильвестра, являются ли они положительно определёнными.

Задача 4. Пусть γ — квадратичная форма на вещественном линейном пространстве, а a и b такие векторы, что $\gamma(a) > 0$ и $\gamma(b) < 0$. Доказать, что a и b линейно независимы.

Задача 5. Докажите, что симметрическая билинейная форма тогда и только тогда отрицательно определена, когда знаки главных угловых миноров чередуются, и самый первый из них отрицательный.

Задача 6. Докажите, что если симметрическая билинейная форма с матрицей A положительно определена, то и симметрическая билинейная форма с матрицей A^{-1} тогда тоже положительно определена.

Задача 7. Доказать, что квадратичная функция на вещественном векторном пространстве представляется в виде произведения двух линейных функций тогда и только тогда, когда ранг её не превосходит 2, и в случае ранга 2 сигнатура равна $(1, 1)$.

Задача 8. Доказать, что определитель эрмитовой матрицы — вещественное число.

Задача 9. Что можно сказать про определитель косоэрмитовой матрицы?

Задача 10. Может ли у псевдоевклидова скалярного произведения изотропный конус являться подпространством?