Задачи для семинара № 14
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

Билинейные, полуторалинейные и квадратичные формы

Задача 1. Найти левое и правое ядра $\operatorname{Ker}_L \varphi$ и $\operatorname{Ker}_R \varphi$ билинейной формы

$$\varphi(x,y) = x^1y^1 + 2x^1y^2 + 3x^2y^1 + 6x^2y^2$$

в $\mathbb{R}^2$ и убедиться, что $\operatorname{Ker}_L \varphi \neq \operatorname{Ker}_R \varphi$.

Задача 2. Методом Лагранжа привести квадратичную форму

$$(x^1)^2 + 2x^1x^2 + 2(x^2)^2 + 4x^2x^3 + 5(x^3)^2$$

к нормальной форме. Найти матрицу соответствующего линейного преобразования.

Задача 3. Применяя метод Лагранжа к соответствующей квадратичной форме, привести к нормальной форме симметрическую билинейную форму, заданную в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Существует ли линейное преобразование, переводящее квадратичную форму

$$2(x^1)^2 + 3(x^2)^2 + 6(x^3)^2 - 4x^1x^2 - 4x^1x^3 + 8x^2x^3$$

в квадратичную форму

$$4(y^1)^2 + (y^2)^2 + 9(y^3)^2 - 12y^1y^2?$$

Задача 5. Пусть на векторном пространстве V задана невырожденная билинейная или полуторалинейная форма φ. Пусть $W \subset V$ такое подпространство, что $\varphi|_W \equiv 0$. Доказать, что $\dim W \leqslant \dfrac{1}{2}\dim V$.

Задача 6. Пусть φ — симметрическая, кососимметрическая или эрмитова форма на V, а W подпространство V. Доказать, что $\operatorname{Ker}\varphi|_W = W \cap W^{\perp}$.

Задача 7. Назовём полуторалинейную форму φ косоэрмитовой, если она удовлетворяет тождеству $\varphi(b,a) = -\overline{\varphi(a,b)}$. Докажите, что φ косоэрмитова тогда и только тогда, когда $i\varphi$ эрмитова. Это объясняет, почему мы не рассматривали на лекциях отдельно косоэрмитовы формы.

Задача 8. Верно ли, что полуторалинейная форма φ является эрмитовой тогда и только тогда, когда для любого вектора a число $\varphi(a,a)$ является вещественным?

Задача 9. Доказать, что симметрическая билинейная форма в векторном пространстве над полем характеристики 2, заданная в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

не может быть заменой базиса приведена к диагональному виду.

Задача 10. Доказать, что пространство $\tilde{\Phi}_2(V)$ полуторалинейных форм на комплексном векторном пространстве V естественным образом изоморфно пространству $\widetilde{\operatorname{Hom}}(V,V^*)$ отображений $f : V \longrightarrow V^*$, таких, что $f(a+b) = f(a) + f(b)$ и $f(\lambda a) = \bar{\lambda} f(a)$.