Динамические системы 2014/2015, 2

В.А. Побережный

1 Ньютонова задача двух тел

1.1 История вопроса

С построения модели и решения данной задачи по сути началась современная физика. Вообще, история научного прогресса в данной области очень иллюстративна и содержательна. Хронологически, можно выделить три отдельных этапа. Во-первых, это наблюдения Тихо Браге. Примерно двадцать лет он вёл наблюдения за звездным небом, записывая и каталогизируя результаты. Его целью было построение новой системы мира, более современной и совершенной чем птолемеева или коперникова. Сам он эту задачу не решил, однако, анализ накопленных им данных наблюдений позволил Кеплеру заметить некоторые закономерности которым подчиняются движения планет в солнечной системе. Это был второй этап - законы Кеплера.

1. Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты описывает в равные промежутки времени равные площади.
3. Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит

Теперь, имея компактные и удобные в работе формулировки обобщающие результаты экспериментальных наблюдений, оставалось построить теорию взаимодействия двух тел такую, чтобы её предсказания согласовывались бы с накопленными данными. Это был третий этап - предложенный Ньютоном закон всемирного тяготения : $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$. Как видно, все три шага к окончательному построению теории очень различны по характеру, но каждый из них совершенно необходим и неизбежен. Многие трудности с которыми встретились первооткрыватели нам сейчас с высоты нашего опыта и привычке к "естественности"и "очевидности"законов Ньютона трудно представить. Так, например, сам Кеплер живя раньше Ньютона соответственно не был знаком с его первым законом, и по-видимому вообще с концепцией инерции. Он полагал, что солнце не притягивает планеты, а "закручивает"их вокруг себя, то есть сила направлена не по радиусу, а устроена как-то вроде вихря. И оригинальная авторская формулировка второго закона Кеплера оперирует как раз терминами связанными с этой крутящей силой. Таким образом, то что в законе всемирного тяготения утверждается что силы направлены по прямой, соединяющей действующие материальные точки было по тем временам вполне содержательным утверждением, хотя сейчас может казаться пустой формальностью.

1.2 Постановка задачи

Наша дальнейшая деятельность связана с исследованием ньютоновской модели. То есть, пусть мы согласны принять на веру закон всемирного тяготения и три (четыре) закона Ньютона. Что можно при этих допущениях сказать об эволюции замкнутой системы двух массивных материальных точек, в $\mathbb{R}^3$ взаимодействующих по ньютонову закону всемирного тяготения:

$$\frac{d^2(m_1\mathbf{r}_1(t))}{dt^2} = \mathbf{F}_{12} = G\frac{m_1m_2}{|\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)|^2}\cdot\frac{\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)}{|\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)|}$$
$$\frac{d^2(m_2\mathbf{r}_2(t))}{dt^2} = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

Можно ли из законов Ньютона получить законы Кеплера? Что можно сказать о качественном поведении системы? Жирным шрифтом, здесь и далее, обозначены векторные величины. $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ это радиус-вектора двух материальных точек, m_1, m_2 их массы, G – некоторая константа (гравитационная постоянная). Всего, получается система шести нелинейных уравнений второго порядка на шесть неизвестных функций. Очевидно, что на самом деле число независимых параметров в задаче меньше, перед тем как начинать решать уравнения стоит попробовать подобрать более удобную систему координат, помня конечно же, что она должна быть инерциальной, то есть получаться из исходной сдвигом, поворотом или равномерным прямолинейным движением. Ещё одна возможность – замена переменных (зависимых), такое преобразование тоже могло бы как-то упростить уравнения при удачном выборе замены.

1.3 Потенциальность

Проверим, что силы гравитационного взаимодействия потенциальны.

Предварительный модельный пример. Какое силовое поле создаёт частица массы M помещённая в начало координат? Известно какое, пробную частицу массы m, находящуюся в точке $\mathbf{r}$ она притягивает с силой $\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$. Можно ли тут подобрать потенциал $U(\mathbf{r})$ так чтобы выполнялось $\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$? Можно, и довольно просто, очевидно подходит $U(\mathbf{r}) = -G\frac{Mm}{|\mathbf{r}|}$. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} G\frac{Mm}{|\mathbf{r}|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} G\frac{Mm}{|\mathbf{r}|} = -G\frac{Mm}{|\mathbf{r}|^2}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} = -G\frac{Mm}{|\mathbf{r}|^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

в точности как и требовалось.

Как изменится ситуация если теперь у нас обе точки подвижны? Теперь нам надо подобрать потенциал $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ такой, чтобы

$$-\nabla_1 U = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1} = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_2} = \nabla_2 U$$

Ответ опять очевиден, совершенно аналогично модельному случаю легко заметить и проверить, что подходит $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -G\dfrac{m_1m_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}$. То есть система двух тел с гравитационным взаимодействием действительно потенциальна.

1.4 Отделение центра масс

Ранее мы уже видели, что движение центра масс определяется суммой внешних сил действующих на систему. Наша система замкнута, внешних сил нет, и значит, по первому закону Ньютона центр масс системы движется равномерно и прямолинейно. Конечно же это можно увидеть и непосредственно из уравнений движения без всякой дополнительной теории:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 \Rightarrow \ddot{\mathbf{X}}(t) = \left(\frac{m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2}{m_1+m_2}\right) = \left(\frac{\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}}{m_1+m_2}\right) = 0$$

То есть действительно, центр масс в задаче движется равномерно и прямолинейно.

Хорошо, попробуем теперь подобрать по возможности наиболее комфортную замену независимых переменных в нашей системе. Какие шесть динамических величин нам имело бы смысл рассмотреть вместо компонент $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$? У нас есть хороший кандидат на половину новых переменных это компоненты $\mathbf{X}(t)$ центра масс системы. Они весьма просто связаны с исходными переменными, уравнения движения для них мы тоже уже знаем: $\ddot{\mathbf{X}} = 0$. Дополнительными переменными можно было бы в принципе оставить один из исходных векторов $\mathbf{r}_1$ или $\mathbf{r}_1$, но в этом случае уравнения получатся неудобные, несимметричные и вообще, по опыту мы знаем, что довольно часто удачными дополнительными величинами к "суммам"оказываются соответствующие "разности". Так что разумным кандидатом на оставшиеся три переменные можно считать например $\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)$. Тем более, как мы уже проверяли, именно от модуля этой величины зависит потенциал U в нашей задаче, это является ещё одним аргументом в в пользу естественности и "физичности"такого выбора и позволяет надеяться на хорошие уравнения после замены.

Итак, каковы будут уравнения движения для $\mathbf{x}(t)$?

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}_1(t) - \ddot{\mathbf{r}}_2(t) = G\frac{m_1+m_2}{|\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)|^2}\cdot\frac{\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)}{|\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)|} = G\frac{m_1+m_2}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

Или, в терминах найденного ранее гравитационного потенциала U:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\nabla U = -\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}U(\mathbf{x})$$

Итак, наша исходная система шести нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d^2(m_1\mathbf{r}_1(t))}{dt^2} = G\dfrac{m_1m_2}{|\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)|^2}\cdot\dfrac{\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)}{|\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)|} \\ \dfrac{d^2(m_2\mathbf{r}_2(t))}{dt^2} = G\dfrac{m_1m_2}{|\mathbf{r}_1(t)-\mathbf{r}_2(t)|^2}\cdot\dfrac{\mathbf{r}_1(t)-\mathbf{r}_2(t)}{|\mathbf{r}_1(t)-\mathbf{r}_2(t)|} \end{cases}$$

под действием **линейной** и следовательно гладкой взаимно-однозначной итд. замены координат

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t) = \dfrac{m_1\mathbf{r}_1(t)+m_2\mathbf{r}_2(t)}{m_1+m_2} \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{r}_1(t)-\mathbf{r}_2(t) \end{cases}$$

перешла в систему

$$\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{\mathbf{X}} &= 0 \\ \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m2}\ddot{\mathbf{x}} &= -G\dfrac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} = -\nabla U(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Как это интерпретировать? Это надо понимать так, что после наших преобразований задача свелась к движению всего лишь одной частицы массы в центральном потенциальном силовом поле с уже описанным нами гравитационным потенциалом $U(\mathbf{x})$.

Итак, у нас по сути осталось одно (векторное) уравнение второго порядка. Здесь уже будет разумным переобозначить входящие в уравнение константы чтобы не тянуть за собой обозначения, становящиеся излишне громоздкими. Стало быть в дальнейшем работаем с уравнением

$$\ddot{\mathbf{x}} = -k\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

1.5 Момент импульса

Частица наша летает в центральном поле. Как мы уже знаем, при таком движении у нее будет наблюдаться динамический инвариант – момент импульса. Обозначим $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ вектор скорости частицы. Тогда векторное произведение $\mathbf{h} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ не зависит от времени. Ну действительно,

$$\dot{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} + \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}} = 0 - \mathbf{x} \times \mathbf{x} \cdot \frac{k}{|\mathbf{x}|^3} = 0$$

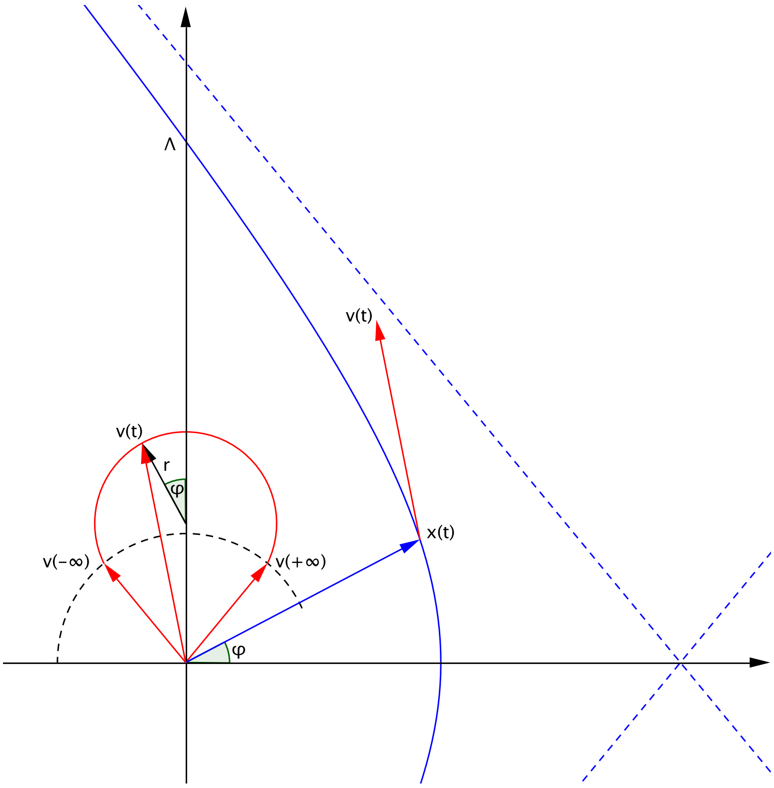
Итак, вектор $\mathbf{h}$ во-первых постоянен, а во-вторых, по своему построению он во все моменты времени перпендикулярен радиус-вектору $\mathbf{x}$. Значит во все моменты времени движение происходит в проходящей через начало координат плоскости ортогональной вектору $\mathbf{h}$. Вполне соответствует ожидаемому нами первому закону Кеплера.

Теперь, раз уж движение у нас происходит в плоскости разумно было бы выбрать координаты покомфортнее для работы. Очевидно удобным будет оставив начало координат на месте совместить ось z с направлением вектора $\mathbf{h}$. Так что теперь $\mathbf{x}(t) \times \mathbf{v}(t) = \mathbf{h}(t) = (0, 0, h)$ и значит движение частицы происходит в плоскости (x, y). Ну и раз уж сила и потенциал в этой плоскости зависят от расстояния до начала координат, да и поле центральное, то наверное стоит перейти в этой плоскости к полярным координатам: $\mathbf{x}(t) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$. А как в этих переменных выражается h? Прямым вычислением получаем: $h = r^2\dot{\varphi}$. То есть. при движении частицы в плоскости имеем для неё закон сохранения: $r^2\dot{\varphi} = const$.

1.6 Окружности скоростей

В исследуемой задаче имеется довольно глубокая и содержательная геометрия. Для полного её понимания необходимо знакомство с такими понятиями как метрика Леви-Чевита, гиперболическая геометрия и пространства постоянной кривизны что выходит далеко за рамки курса. Тем не менее некоторые вполне доступные базовые конструкции и понятия мы вполне можем успешно использовать для дальнейшего решения. Начнём со следующего утверждения.

Теорема 1 (Гамильтон, 1846) *При эволюции во времени вектор скорости* $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ *двигается по окружности* C *в некоторой плоскости, проходящей через начало координат. Для любой окружности, обладающей указанным свойством существует орбита* $\mathbf{x}(t)$ *для которой выбранная окружность будет окружностью скоростей. Выбор окружности* C *(плюс её ориентации) однозначно задаёт орбиту* $\mathbf{x}(t)$



Этот результат немедленно получается весьма простым образом из материала предыдущего раздела. Мы имеем такой набор соотношений:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{x}} = &\ -k\tfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \text{ – уравнения движения} \\
\mathbf{x}(t) = &\ r(t)\begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ – движение плоское, полярные координаты} \\
\mathbf{x}\times\dot{\mathbf{x}} = &\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = const \text{ – сохранение момента импульса}
\end{aligned}$$

Из первых двух строчек:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = -k\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = -\frac{k}{r^2(t)}\begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Подставляем $r^2 = h/\dot{\varphi}$ из сохранения момента импульса:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{k}{h}\dot{\varphi}\begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{k}{h}\begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}\frac{d\varphi}{dt}$$

Исключаем t:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\varphi} = -\frac{k}{h}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Такие уравнения мы интегрировать умеем:

$$\mathbf{v}(\varphi) = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{c}$$

Где $\mathbf{c} = (c_1, c_2, 0)$ это константа интегрирования, а $R = k/h$ новая константа (для удобства обозначений)

Замечание 1 *Легко видеть, что вектор* $\mathbf{v}(t) - \mathbf{c}$ *всегда ортогонален* $\mathbf{x}(t)$. *Следовательно, угол дуги между двумя векторами на окружности скоростей равен углу между радиус-векторами соответствующих точек орбиты*

1.7 Окончательное решение

У нас всё ещё осталась небольшая свобода в выборе координат для нашей задачи. А именно, в нашей зафиксированной плоскости в которой происходит движение с зафиксированным (центр масс) началом координат осталось возможность вращений. Так что давайте повернём оси (x, y) так чтобы ось ординат была бы сонаправлена с вектором $\mathbf{c}$. То есть в этих координатах будет $\mathbf{c} = (0, c, 0)$. Получаем:

$$\mathbf{v}(\varphi) = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{c} = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \dfrac{c}{R} + \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = \mathbf{h} = \mathbf{x}\times\mathbf{v} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\times R\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \dfrac{c}{R}+\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ rR(1+\dfrac{c}{R}\cos\varphi) \end{pmatrix}$$

Откуда

$$r = \frac{h}{R(1+\dfrac{c}{R}\cos\varphi)} = \frac{\Lambda}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

Это стандартное уравнение плоского конического сечения с эксцентриситетом ε и фокусом в начале координат. Переобозначены константы $\varepsilon = c/R$ и $\Lambda = h/R = h^2/k$. Отметим, что по построению $\varepsilon \geq 0$. Про такие уравнения и конические сечения нам вообще-то много чего известно. При $0 < \varepsilon < 1$ это эллипс ($\varepsilon = 0$ –окружность), $\varepsilon = 1$ даёт параболу и наконец $\varepsilon > 1$ – гипербола. В двух последних случаях движение происходит в области $1+\varepsilon\cos\varphi > 0$. Более-менее всё.

Строго говоря, теорема 1 доказана пока что ещё не окончательно. Вообще говоря, пока что мы показали, что интегральные кривые системы, лежат на конических сечениях ничего не гарантировав про зависимость $\mathbf{x}$ от t. Но это уже несложно. Итак, r есть фунция от φ. Из сохранения момента получаем $r^2(\varphi)\dot{\varphi} = h$ и следовательно $dt = r^2(\varphi)h^{-1}d\varphi$ и $t = h^{-1}\int r^2(\varphi)d\varphi$. То есть t тоже является функцией от φ. По теореме об обратной функции *(Почему?! Проверьте!)* φ будет хорошо определённой, непрерывной и дифференцируемой функцией от t. Но тогда r и следовательно $\mathbf{x}$ тоже будут хорошими функциями от t. Проверка что описанная функция $\mathbf{x}$ действительно решает исходное уравнение совершенно элементарна.

1.8 Энергия

В нашей замкнутой системе действующие силы как мы уже проверили потенциальны, значит, в соответствии с общей теорией, энергия системы сохраняется при эволюции во времени. Конечно же это можно легко увидеть и непосредственным дифференцированием

$$E = \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \frac{k}{r} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} + \frac{k}{r^2}\dot{r} = \mathbf{v}\left(-k\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\right) + \frac{k}{r^2}\dot{r} = 0$$

так как $\dot{r} = \frac{d}{dt}|\mathbf{x}| = \mathbf{x}\dot{\mathbf{x}}/|\mathbf{x}|$ (*Проверьте!*). Из того, что потенциал всюду отрицателен следует что во всех точках орбиты $\mathbf{v}^2 > 2E$. Как выражается энергия через использованные нами в решении параметры? Легко увидеть (или хотя бы проверить) что в терминах окружности скоростей $2E = \mathbf{c}^2 - R^2$ или же $2E = k^2/h^2(\varepsilon^2 - 1)$. Таким образом, уровень энергии орбиты определяет её форму: $E < 0$ – эллипс, $E = 0$ – парабола и $E > 0$ – гипербола.

Замечание 2 *Как известно, потенциальная энергия, а следовательно и полная энергия системы определяется с точностью до константы. Мы в использованном гравитационном нами гравитационном потенциале сделали естественный выбор $U(\infty) = 0$ и говоря об энергии системы всегда подразумеваем именно этот выбор.*

1.9 Эллиптические орбиты

Для отрицательных уровней энергии свойства соответствующей эллиптической орбиты могут быть несложно выражены через энергию. Например найдём выражение для длины большой полуоси:

$$2a = r\Big|_{\varphi=0} + r\Big|_{\varphi=\pi} = \frac{\Lambda}{1+\varepsilon} + \frac{\Lambda}{1-\varepsilon} = \frac{2\Lambda}{1-\varepsilon^2} = -\frac{\Lambda k^2}{Eh^2} = -\frac{k}{E}$$

или, в обратную сторону выражая энергию через полуось – $2E = -k/a$. Таким образом, энергия на эллиптической орбите отрицательна, а её абсолютная величина обратно пропорциональна большой полуоси орбиты.

Малая полуось: в её конце вектор скорости горизонтален, значит $R(\cos\varphi + \varepsilon) = 0$ и $\cos\varphi = -\varepsilon$. Значит, длина соответствующего радиус-вектора равна $r = \Lambda/(1-\varepsilon^2)$. Но тогда $b = r\sin\varphi = \Lambda/\sqrt{1-\varepsilon^2}$. (очевидно если картинку нарисовать)

Площадь эллипса:

$$S = \pi ab = \frac{\pi\Lambda^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} = \frac{\pi hk}{(-2E)^{3/2}}$$

Скорость заметания секториальной площади равна половине момента, $(1/2)r^2\dot{\varphi}$ или же $h/2$ (векторное произведение это площадь параллелограмма а не треугольника), то есть

$$\frac{dS}{dt} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{2} = \frac{h}{2} \Rightarrow S = S(T) = \int_0^T \frac{h}{2}dt = \frac{Th}{2}$$

где T это период, то есть время обращения по орбите. Отсюда находим

$$T = \frac{2S}{h} = \frac{2\pi k}{(-2E)^{3/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{k}}$$

В точности третий закон Кеплера. Квадраты периодов орбит пропорциональны кубам их больших полуосей. То есть ньютоновская теория гравитации полностью согласуется с кеплеровскими законами движения планет, её предсказания соответствуют экспериментальным данным.

1.10 Реклама (для любопытных)

Стоит обратить внимание на следующие две проблемы.

Первая теоретико-математическая. Как уже было анонсировано, важная и содержательная для понимания как конкретно этой задачи, так и общей теории геометрия требует основательного знакомства с курсом дифференциальной геометрии. Не имея конечно же возможности дать здесь хотя бы краткое введение в её основы, всё-таки приведём формулировки основных результатов. Итак, все окружности скоростей имеющиеся в задаче Ньютона являются стереографическими проекциями больших кругов четырёхмерной гиперсферы. Для фиксированной энергии E на множестве всех векторов скорости удовлетворяющих $\mathbf{v}^2 > 2E$ определена каноническая Риманова метрика постоянной кривизны $-2E$. Геодезические этой метрики будут в точности соответствовать окружностям скоростей. Таким образом решения задачи Ньютона однозначно определяются окружностями скоростей, а каждая окружность скоростей в свою очередь является прямой в одной из трёх классических геометрий – эвклидовой, сферической или геометрии Лобачевского. То есть задача Ньютона эквивалентна нахождению геодезических (кратчайших или прямейших) в некоторой изощрённой геометрии.

Вторая более физическая. А почему в нашем мире гравитационный потенциал именно такой: $U(\mathbf{x}) = -k/|\mathbf{x}|$. Мог ли бы он быть другим? Какая-нибудь другая степень в знаменателе например? Например, второй закон Кеплера такая модификация не нарушает. Может и третий как-нибудь изменился бы но не очень страшно? Ну летали бы планеты и частицы как-то по-другому но как-то бы летали же бы всё-таки. Мог бы такой мир быть все-таки хоть как-то похож на то что у нас есть?

2 Задачи, которые надо уметь решать после этой лекции

Задача: *Пусть* $\mathbf{x}(t)$ *эллиптическое решение задачи Ньютона с начальными условиями* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{b}$. *Какие могут быть типа орбит для начальных данных* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{b}/2$ *и* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = 2\mathbf{b}$*?*

Задача: *Пусть* $\mathbf{x}(t)$ *параболическое решение задачи Ньютона с начальными условиями* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{b}$. *При каких условиях решение с начальными данными* $\mathbf{x}(0) = -\mathbf{a}$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = -\mathbf{c}$ *будет тоже параболическим?*

Задача(*): *Может ли* $\mathbf{x}(t)$ *уйти по прямой на бесконечность с нулевой предельной скоростью? С ненулевой?*

Задача: *Найти производную по времени от векторной величины*

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{v} \times \mathbf{h} - k\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

$\mathbf{x}(t)$ *– орбита задачи Ньютона,* $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$, *где* $\mathbf{h} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$. *Пояснить геометрический смысл вектора* $\mathbf{K}$, *нарисовать его на картинке.*

Задача: *Считая известным период обращения луны вокруг земли (чему он кстати равен?) орбиту луны более-менее круговой, а землю и луну маленькими относительно размеров орбиты, найти, через какое примерно время луна упадёт на землю если двигаясь по своей орбите луна в какой-то момент внезапно остановится (далее действуют только силы гравитации).*