

Дискретная математика

Семинар 4

ВШЭ, факультет математики
первый курс, третий модуль

1. Вычислите $\ln(1 + s)$, $\ln(1 - s)$, $\ln((1 - s)^{-1})$ (\ln – обратный ряд к экспоненте).

2. Докажите равенства

$$\sin^2(s) + \cos^2(s) = 1, \quad (1 + s)^\alpha (1 + s)^\beta = (1 + s)^{\alpha + \beta}.$$

3. Образуют ли формальные ряды группу относительно операции композиции? Если да, то является ли эта группа абелевой?

4. Докажите формулу замены переменных в интеграле: для ряда $B = B(t)$ с нулевым свободным членом ($B(0) = 0$) и произвольного ряда $A = A(s)$

$$\left(\int A \right) (B(t)) = \int (A(B(t))) B'(t).$$

5. Найдите производящие функции для последовательностей:

- $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$;
- $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$;
- $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$;
- $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots$.

6. Вычислите коэффициент при z^n у ряда $(\ln(1 - z))^2 / (1 - z)^{m+1}$.

7. Вычислите сумму $\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{k}{4k^2 - 1}$.