Высшая школа экономики. Факультет математики
Итоговая государственная аттестация

Вопросы 2015

1. Числовые последовательности, пределы и предельные точки, критерий Коши сходимости последовательности. [1, т. I, III.1], [2, т. I, I.1].

2. Предел функции, непрерывность, теорема о промежуточном значении непрерывной функции, равномерная непрерывность непрерывной функции на отрезке. [1, т. I, III.2], [2, т. I, II.2, II.5].

3. Сходимость числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов (сходимость абсолютно сходящегося ряда, перестановка членов). Признаки сходимости Д'Аламбера и Коши. Условно сходящиеся ряды. Примеры условно сходящихся рядов. [2, т. II, XI.1–XI.3].

4. Дифференцируемые функции одного переменного. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа о конечном приращении. [1, т. I, V.1, V.3], [2, т. I, III.1–III.3].

5. Частные производные функции нескольких переменных. Производная (дифференциал) отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Теорема о производной сложной функции. [1, т. I, VIII.2, VIII.3], [2, т. I, V.3].

6. Теорема о неявной функции для отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ (без доказательства). Теорема об обратной функции. Производная неявной и обратной функции. [1, т. I, VIII.5, VIII.6], [2, т. I, VI.2].

7. Интеграл Римана функции на отрезке и его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница и существование первообразной для непрерывной функции. [1, т. I, VI.1–VI.3], [2, т. II, IX.1–IX.3].

8. Формула Тейлора для функции одного переменного. Формы остаточного члена. [1, т. I, V.3, VI.3], [2, т. I, III.5, т. II, IX.4]

9. Экстремумы и выпуклость функций одного переменного. Исследование функции на экстремумы и выпуклость с помощью производных. [1, т. I, V.4], [2, т. I, IV.1–IV.2].

10. Экстремумы функций нескольких переменных, условные экстремумы, множители Лагранжа. [1, т. I, VIII.4, VIII.7], [2, т. I, V.5, VI.3].

11. Интеграл Римана по n-мерному промежутку. Сведение кратного интеграла от непрерывной функции к повторному. [1, т. II, XI.1, XI.2, XI.4], [2, т. III, XVI.1, XVI.2].

12. Криволинейные интегралы. Вычисление длин кривых и работы силы по криволинейному пути. Формула Грина. [1, т. II, XIII.1, XIII.3], [2, т. III, XV.1, XV.2, XVI.3].

13. Функциональные последовательности и ряды, равномерная сходимость, непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. [1, т. II, XVI.1–XVI.3], [2, т. II, XII.1, XII.2].

14. Несобственные интегралы, признаки сходимости несобственных интегралов. Сходимость интегралов $\int_0^1 x^\alpha dx$ и $\int_1^\infty x^\alpha dx$. [1, т. I, VI.5], [2, т. II, XIII.1, XIII.2].

15. Ортогональные системы векторов в пространстве со скалярным произведением. Примеры. Тригонометрическая система. Неравенство Бесселя. Полные ортогональные системы, теорема о разложении в ряд по полной ортогональной системе, равенство Парсеваля. Полнота тригонометрической системы (без доказательства). Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье функции класса C^1. [1, т. II, XVIII.1, XVIII.2], [3, III.4, VII.3.1, VIII.1]

16. Комбинаторика: сочетания, сочетания с повторениями, перестановки, биномиальные коэффициенты. Тождества с биномиальными коэффициентами. [4, §1.1, 1.2], [5, 1.2]

17. Производящие функции. Линейные рекуррентные соотношения и рациональные производящие функции. Формула Бине для чисел Фибоначчи. [4, §2.1–2.3]

18. Аффинные пространства, аффинные отображения. Задание аффинного отображения n-мерного аффинного пространства образами $n+1$ точки. [6, 7.1, 7.3], [8, т. 2 гл. 4 §1]

19. Проективные пространства, проективные отображения. Задание проективного отображения n-мерного проективного пространства образами $n+2$ точек. [6, 7.5] [7, §18], [8, т. 2 гл. 5 §3]

20. Кривые второго порядка в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}^2$, их аффинная и проективная классификации. [6, 7.4, 7.5], [7, §19], [8, т. 2 гл. 5]

21. Векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, теорема о ранге матрицы. [6, 2.2, 2.3], [7, §§7-8], [8, т. 2 гл. 1 §2, гл. 2 §1]

22. Определитель матрицы и его свойства. Разложение по строке и столбцу. Определитель произведения матриц. [6, 2.4] [7, §10], [8, т. 1 гл. 3]

23. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Формулы Крамера. [6, 2.1, 2.5], [8, т. 1 гл. 1 §3, гл. 3 §3]

24. Характеристический и минимальный многочлены линейного оператора, теорема Гамильтона–Кэли. [6, 6.2, 6.5] [7, §13], [8, т. 2 гл. 2 §3–4]

25. Корневые подпространства линейного оператора, жорданова нормальная форма. [6, 6.4], [7, §13], [8, т. 2 гл. 2 §4]

26. Квадратичные и билинейные формы, положительная определенность, закон инерции. [6, 5.3], [7, §17], [8, т. 2 гл. 1 §4]

27. Евклидовы линейные пространства. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогонализация Грама-Шмидта. [6, 5.3], [7, §14], [8, т. 2 гл. 3 §1]

28. Вещественные самосопряженные операторы, их диагонализуемость. Приведение квадратичной формы к главным осям. [6, 6.3], [7, §17], [8, т. 2 гл. 3 §3]

29. Группы, подгруппы, смежные классы, формула Лагранжа для числа смежных классов.[6, 4.1, 4.5], [7, §§15, 16], [8, т. 3 гл. 1 §2]

30. Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы, факторгруппы. Теорема о гомоморфизмах групп. [6, 4.6], [7, §§15, 16], [8, т. 3 гл. 1 §2, 4]

31. Классификация конечнопорожденных абелевых групп. (без доказательства). Свободные абелевы группы конечного ранга и их подгруппы. [6, 9.1], [7, §12], [8, т. 3 гл. 2 §3]

32. Коммутативные кольца. Примеры колец. Кольца вычетов. Малая теорема Ферма. [6, 1.6, 9.2], [7, §2], [8, т. 1 гл. 4 §3]

33. Евклидовы кольца. Примеры. Неприводимые элементы, делимость. Наибольший общий делитель. Факториальность евклидовых колец. [6, 9.2], [7, §6], [8, т. 1 гл. 5 §3]

34. Конечные поля. Примеры. Цикличность мультипликативной группы конечного поля. [6, 1.6], [7, 4.4],

35. Открытые и замкнутые подмножества $\mathbb{R}^n$, внутренность и замыкание. Описание открытых подмножеств $\mathbb{R}$. Непрерывные отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. [1, т. I, VII] [3, II, §2.5]

36. Топологические пространства. Компактность, критерий компактности подмножества $\mathbb{R}^n$. [9, Лекции 2, 3]

37. Связность и линейная связность топологического пространства. Связность отрезка. Пример связного не линейно связного множества. [9, Лекции 2, 3].

38. Гомотопия отображений. Стягиваемость выпуклых множеств. Фундаментальная группа топологического пространства. Ее вычисление для окружности S^1 и сферы S^2. [9, Лекции 4, 5, 6]

39. Комплексная производная, голоморфные функции, условия Коши–Римана, Примеры голоморфных функций. Голоморфность элементарных функций. [10, 2.2-2.6, стр. 13-19]

40. Теорема Коши об интеграле голоморфной функции по замкнутому контуру. Интегральная формула Коши. [10, 5.1-5.3, стр. 53-64]

41. Область сходимости степенного ряда с комплексными коэффициентами. Разложение функции, голоморфной в круге, в ряд Тейлора. Интегральная формула для коэффициентов ряда Тейлора. [10, 6.1-6.6, 6.8-6.9. стр. 65-75]

42. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Область сходимости ряда Лорана. Единственность лорановского разложения. Классификация изолированных особых точек голоморфных функций. [10, 7.1-7.8, стр. 82-94]

43. Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Вычеты и коэффициенты ряда Лорана. [10, 8.1-8.2, стр. 97-99]

44. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения и его решения. Задача Коши и теорема о существовании и единственности ее решения (без доказательства). Приближение решения задачи Коши итерациями Пикара. [11, разделы “Теорема существования и единственности” и “Метод Пикара”]

45. Методы решения дифференциальных уравнений: решение уравнений с разделяющимися переменными, метод вариации постоянных для линейных неоднородных уравнения первого порядка, однородные уравнения. [11, разделы 2,7,9,10 части 1 и “Линейные уравнения высших порядков”] [12, одноименные разделы]

46. Решение обыкновенных дифференциальных линейных однородных и неоднородных уравнений n-го порядка и линейных систем первого порядка с постоянными коэффициентами. Квазимногочлены. Матричная экспонента и ее применение. [11, разделы “Экспонента линейного оператора” и “Вычисление экспоненты”]

47. Вероятностное пространство. Условная вероятность, формулы полной вероятности и Байеса. Независимость событий. Случайные величины. Функция распределения, плотность. Дискретные и непрерывные случайные величины. Математическое ожидание. Дисперсия. [13, т. 1, §§I.(1, 3), II.(1, 4, 6, 8)][14, §§6,7, 18–19, 23–24]

48. Случайные векторы (наборы случайных величин). Совместные функция распределения и плотности нескольких случайных величин. Независимость случайных величин, её выражение в терминах совместной функции распределения и совместной плотности. Ковариация и коэффициент корреляции. Некоррелированность независимых величин. [13, т. 1., §§II.(5, 6, 8), I.4][14, §§20, 24–25]

49. Виды сходимости последовательностей случайных величин: почти наверное, по вероятности, по распределению. Закон больших чисел (с доказательством). Усиленный закон больших чисел (формулировка). [13, т. 1, §II.10] [14, §28] [13, т. 2, §IV.3]

50. Характеристические функции. Выражение сходимости по распределению в терминах характеристических функций (без доказательства). Центральная предельная теорема (формулировка, сведение к предельной теореме для характеристических функций). [13, т. 1, §§II.12, III.(1–4)][14, §§32, 35, 39–40]

Список литературы

[1] В. А. Зорич. Математический анализ. Изд. 4. М.: МЦНМО, 2002

[2] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Изд. 8. М.: Физматлит, 2003

[3] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7. М.: Физматлит, 2004

[4] С. К. Ландо. Введение в дискретную математику. М.: МЦНМО, 2012

[5] Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990

[6] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2011

[7] А. Л. Городенцев. Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1. М.: МЦНМО, 2013

[8] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. М.: МЦНМО, 2009

[9] Ю. Бурман. Лекции “Введение в топологию”

[10] А. В. Домрин, А. Г. Сергеев. Лекции по комплексному анализу. МИАН, 2004, том 1, том 2.

[11] Ильяшенко, Буфетов, Гончарук “Обыкновенные дифференциальные уравнения”

[12] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Либроком, 2011

[13] А. Н. Ширяев. Вероятность. В 2-х кн. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2004. Кн. 1: Вероятность-1. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. — 520 с. Кн. 2: Вероятность-2. Суммы и последовательности случайных величин — стационарные, мартингалы, марковские цепи. — 408 с.

[14] Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Изд. 8-е. М.: Едиториал УРСС, 2005. — 408 с.