Дискретная математика
Листок 3

ВШЭ, факультет математики
первый курс, третий модуль

Листок можно сдавать до 03.03.2015.

1. Докажите, что любое натуральное число единственным образом представляется в виде $a_1F_1+a_2F_2+\dots$, где F_n – числа Фибоначчи, а каждое из чисел a_i равно нулю или единице, причем единиц в сумме конечное число и два идущих подряд элемента последовательности a_i не могут равняться единице.

2. Вычислите $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1-k/n)^n$.

3. Пусть $S_n=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{m+2k}a_k$, где m,n – целые неотрицательные числа. Выразите производящую функцию $S(z)=\sum_{n\geq 0}S_nz^n$ через производящую функцию $A(z)=\sum_{n\geq 0}a_nz^n$.

4. Для натуральных m,n вычислите в замкнутой форме сумму

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}.$$

5. Решите рекуррентное соотношение $g_0=1$, $g_n=g_{n-1}+2g_{n-2}+\dots+ng_0$ в терминах чисел Фибоначчи.

6. Найдите производящую функцию последовательности $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, $n\geq 1$.

7. Найдите производящие функции и явные выражения для элементов последовательностей, заданных рекуррентными формулами:

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n,\ a_1=a_0=1,$$
$$a_{n+3}=-3a_{n+2}-3a_{n+1}-a_n,\ a_0=1,a_1=a_2=0.$$

8. Экспоненциальная производящая функция (эпф) чисел a_n это ряд $\sum_{n\geq 0}a_n\frac{z^n}{n!}$. Пусть $A(z)$ и $B(z)$ эпф последовательностей a_n и b_n соответственно. Найдите числа c_n такие, что произведение $A(z)B(z)$ является эпф чисел c_n.

9. Рассмотрим возрастающе-убывающие перестановки $a_1,\dots,a_n$, $1\leq a_i\leq n$, удовлетворяющие условиям $a_1<a_2>a_3<a_4>\dots$. Пусть A_n – число таких перестановок. Докажите, что эпф чисел A_n равна $(1+\sin(z))/\cos(z)$.

10. Пусть $m\geq 2$ – натуральное число. Выразите в замкнутом виде (как функцию z и m) производящую функцию последовательности $a_n=(n \bmod m)$. Выразите a_n через комплексный первообразный корень из единицы степени m.