

## Дискретная математика

### Семинар 5

ВШЭ, факультет математики

первый курс, третий модуль

1. Пусть  $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$  – производящая функция для последовательности  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Найдите производящие функции для последовательностей:

а).  $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots$ ;

б).  $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots$ ;

в).  $a_0, a_1b, a_2b^2, a_3b^3, \dots$ ;

г).  $a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$ .

2. Пользуясь производящей функцией для чисел Фибоначчи, докажите для них тождества:

а).  $F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ ;

б).  $F_0 + F_2 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1}$ ;

в).  $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$ ;

г).  $F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ .

3. Рекуррентное правило образования последовательности Фибоначчи позволяет продолжить ее “назад”, т.е. для отрицательных значений индекса. Так, например,  $F_{-1} = 0$ . Чему равно  $F_{-10}$ ?

4. Найдите производящую функцию для чисел Фибоначчи с чётными номерами.

5. Найдите представление в виде суммы элементарных дробей следующих рациональных функций:

$$\frac{1}{1-s-2s^2}; \quad \frac{1+2s}{1-3s-4s^2}; \quad \frac{1+2s}{1-3s^3}.$$

6. Найдите производящую функцию для последовательности, заданной линейным рекуррентным соотношением  $a_{n+1} = 2a_n - 1$ .

7. Докажите, что  $\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(m,n)}$ .