ЛИСТОК 2

Введение в алгебраическую геометрию - матфак ВШЭ

прием задач: 27.02.2015, 06.03.2015

Некоторые задачи повторяют материал лекций.

Задача 1. Проверьте, что несвязное объединение схем является схемой. Покажите, что несвязное объединение конечного числа аффинных схем снова является аффинной схемой, а бесконечного – нет.

Задача 2 (Proposition 5.3.1 в учебнике R. Vakil «Foundations of Algebraic Geometry»)**.** Назовем *выделенными* открытые подмножества аффинной схемы $\operatorname{Spec} A$, вида $D(f)$ – то есть множество простых идеалов, не содержащих какой-то элемент $f \in A$. Пусть X – схема, $U, V \subset X$ – две открытые аффинные подсхемы, x – точка из $U \cap V$. Докажите, что у x есть окрестность внутри $U \cap V$, являющаяся выделенной и в U, и в V.

Задача 3. Схема X называется квазикомпактной, если у любого открытого покрытия есть конечное подпокрытие. Покажите, что непустое замкнутое подмножество квазикомпактной схемы содержит замкнутую точку.

Указание: замкнутая точка аффинной подсхемы $U \subset X$ не обязана быть замкнутой во всем X, но остальные точки её замыкания лежат в $X \backslash U$.

Следующие несколько упражнений - это конструкция расслоенного произведения в категории схем. Напомним, что если X, Y схемы над S, то их расслоенное произведение - это тройка из S-схемы и двух S-морфизмов $(X \times_S Y, p, q)$, $p : X \times_S Y \to X$, $q : X \times_S Y \to Y$, которая определяется следующим универсальным свойством: если Z схема над S с S-морфизмами $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$, то существует единственный S-морфизм $h : Z \to X \times_S Y$, такой, что $f = ph$, $g = qh$ (здесь и далее схема над S, или S-схема - это просто схема X вместе с морфизмом в S , а S-морфизм схем над S - морфизм, коммутирующий с отображениями в S).

Задача 4. (склейка S-схем) Пусть $(X_i), i \in I$ семейство S-схем, $X_{ij}, j \in I$ открытые подсхемы X_i (т.е. открытые подмножества с индуцированной структурой схемы) и заданы S-изоморфизмы $f_{ij} : X_{ij} \to X_{ji}$ такие, что

$f_{ii} = id$, $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$, $f_{ij}(X_{ij} \cap X_{ik}) = X_{ji} \cap X_{jk}$, $f_{ik} = f_{jk} f_{ij}$ на $X_{ij} \cap X_{ik}$. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма S-схема X с открытыми вложениями $g_i : X_i \to X$, такими, что $g_i = g_j f_{ij}$ на X_{ij} и $X = \cup_i g_i(X_i)$. (Открытое вложение - это изоморфизм на открытую подсхему.)

Задача 5. Покажите, что $\mathrm{Spec}\,(A \otimes_C B)$ - расслоенное произведение $\mathrm{Spec}\,(A) \times_{\mathrm{Spec}\,(C)} \mathrm{Spec}\,(B)$ в категории схем (а не только аффинных схем: это мы уже выяснили в прошлом семестре, обсуждая тензорное произведение алгебр).

Задача 6. С помощью склейки схем покажите, что расслоенное произведение $X \times_S Y$ существует, когда Y, S аффинны, затем - то же самое, когда аффинна только S. Указание: если $X \times_S Y$ существует и $U \subset X$ открыто, проверьте, что $p^{-1}(U)$ – расслоенное произведение $U \times_S Y$; используйте этот факт для того, чтобы склеить расслоенное произведение из аффинных кусков.

Задача 7. Разберите общий случай.

Задача 8. Пусть X, Y — схемы над $\mathrm{Spec}\, k$ для какого-то поля k (то есть фиксированы морфизмы $X \to \mathrm{Spec}\, k$ и $Y \to \mathrm{Spec}\, k$). Является ли множество точек $X \times_{\mathrm{Spec}\, k} Y$ (как топологического пространства) произведением множества точек X и множества точек Y? Множество замкнутых точек?

Задача 9. Напомним, что k-точка X, где X схема над $\mathrm{Spec}\, k$ - это морфизм схем $\mathrm{Spec}\, k \to X$, который в композиции со структурным морфизмом $X \to \mathrm{Spec}\, k$ дает тождественное отображение $\mathrm{Spec}\, k \to \mathrm{Spec}\, k$. Покажите, что в условиях предыдущей задачи множество k-точек $X \times_{\mathrm{Spec}\, k} Y$ – произведение множеств k-точек для X и Y.

Задача 10. Можно ли придумать пример поля k и схемы X над ним, у которой нет k-точек в смысле предыдущей задачи, но есть точка с полем вычетов k?

Задача 11. Пусть A — градуированное кольцо, $d > 0$ — целое число. Построим новое градуированное кольцо B: $B_i = A_i$ для i делящегося на d, $B_i = 0$ для i не делящегося на d. Покажите, что морфизм градуированных колец $B \hookrightarrow A$ задает изоморфизм схем $\mathrm{Proj}\, A \to \mathrm{Proj}\, B$.

Задача 12. Покажите, что $\mathrm{Proj}\,(A[x_0,\ldots,x_n]) \cong \mathbb{P}^n \times_{\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\,(A)$, и что если A является k-алгеброй, то $\mathrm{Proj}\,(A[x_0,\ldots,x_n]) \cong \mathbb{P}^n_k \times_k \mathrm{Spec}\,(A)$ (в общем случае для S-схем X, Y и Y-схемы Z верно, что $(X \times_S Y) \times_Y Z \cong X \times_S Z$).

Замечание: теперь можно определить проективное пространство над произвольной схемой X как $\mathbb{P}^n_X := \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} X$. Это определение согласовано с явным в виде Proj от кольца многочленов для аффинных схем.

Задача 13. Задайте образ вложения Сегре $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{nm+n+m}$ однородными уравнениями с целыми коэффициентами. Пусть I это идеал, порожденными ими в $\mathbb{Z}[x_0,\ldots,x_{nm+n+m}]$. Постройте изоморфизм между $\mathrm{Proj}\,\mathbb{Z}[x_0,\ldots,x_{nm+n+m}]/I$ и $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}}$. Для произвольного кольца A представьте $\mathbb{P}^n_A \times_{Spec(A)} \mathbb{P}^m_A$ как $\mathrm{Proj}\,(R)$ и вложите его в проективное пространство над A как замкнутую подсхему.

Задача 14. Пусть $I \subset A$ - идеал. Определим градуированное кольцо $R = \oplus_{d\geq 0} I^d$, где $I^0 = A$. Раздутие спектра A в I - это $\mathrm{Proj}\,(R)$. Проверьте, что если $A = k[X_0, X_1]$, $I = (X_0, X_1)$, то получается то самое раздутие плоскости в точке, которое упоминалось на лекции, то есть подмногообразие $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$, заданное уравнением $x_0 y_1 = x_1 y_0$ на точку $((x_0, x_1), [y_0 : y_1])$. Покажите, что проекция $p : \mathrm{Proj}\,(R) \to Spec(A)$ - изоморфизм вне $V(I)$.

Задача 15. Что получится, если в определении $\mathrm{Proj}\,(k[X_0, X_1, X_2])$ приписать переменной X_0 степень 2 вместо единицы?

Слоем отображения $X \to Y$ над замкнутой точкой $y \in Y$ с полем вычетов k называется $\mathrm{Spec}\,k \times_Y X$, где отображение $\mathrm{Spec}\,k \to Y$ соответствует y. Слой над точкой y автоматически является схемой над $\mathrm{Spec}\,k$.

Задача 16. Постройте связную схему X над $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, у которой для $p \neq 0$ в слое $X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ над простым идеалом (p) число $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-точек равно в точности p. То же для $p+1$. *То же для $p-1$.