Динамические системы 2014/2015, 6

В.А. Побережный

1 Элементарные симметрии

Из явного вида уравнений Эйлера-Лагранжа можно легко получить ряд утверждений о свойствах экстремалей задачи в случаях когда лагранжиан системы имеет простые вырождения, например, не зависит от каких-либо переменных из $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ или t.

Определение 1 *В задаче о минимизации для функционала действия*

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt$$

- *величина* $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ *называется (обобщённым) импульсом*
- *величина* $\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$ *называется (обобщённой) силой*
- *величина* $\dot{\mathbf{q}}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L$ *называется энергией*
- *величина* $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ *называется интегралом движения или первым интегралом системы если на экстремали действия* $\widehat{\mathbf{q}}(t)$ *выполняется* $\dfrac{d}{dt} f(\widehat{\mathbf{q}}(t), \dot{\widehat{\mathbf{q}}}(t), t) = 0$.

Предложение 1 *Если лагранжиан не зависит явно от* q_i *(если* i*-ая компонента обобщённой силы равна нулю) то* i*-ая компонента импульса сохраняется (является интегралом движения).*

Смотрим на уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

видим, что доказывать нечего.

Предложение 2 *Если лагранжиан не зависит явно от времени* ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$)*, то энергия сохраняется (является интегралом движения)*

Проверить очень просто. Всегда выполняется:

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

А на решениях уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$$

следовательно, на экстремалях выполняется

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

И если лагранжиан не зависит явно от времени, то энергия сохраняется.

В лагранжианы построенные по простым механическим системам время как правило не входит, кинетическая энергия зависит только от скоростей, потенциальная только от координат. Легко проверить, что в таком случае наше определение энергии даёт сумму кинетической и потенциальной энергий, или полную энергию системы. В то же время, указанная выше конструкция позволяет определить понятие энергии и для лагранжианов, не имеющих отношения к механике, например, возникающих в дифференциальной геометрии, или даже просто абстрактных интегральных функционалов на пространстве непрерывно-интегрируемых функций.

Наличие в задаче интегралов движения существеннейшим образом упрощает исследование, понижая порядок уравнений с которыми надо работать. Посмотрим как это работает на примере задачи о минимальной поверхности вращения.

2 Минимальные поверхности вращения

Формулировка: *Найти в плоскости O_{xy} кривую соединяющую заданные точки P и Q такую, чтобы боковая поверхность тела образуемого при вращении вокруг O_x была бы минимальной.*

Картинка

Как записать "действие", то есть площадь боковой поверхности? Известно как:

$$S[y(x)] = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi \int_a^b q\sqrt{1+\dot{q}^2}dt = S[q(t)]$$

(просто поменяли обозначения чтобы было похоже на предыдущие наши формулы) Что будет по Эйлеру-Лагранжу?

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \sqrt{1+\dot{q}^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{q\dot{q}}{\sqrt{1+\dot{q}^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{(\dot{q}\dot{q}+q\ddot{q})\sqrt{1+\dot{q}^2} - q\dot{q}\frac{\dot{q}\ddot{q}}{\sqrt{1+\dot{q}^2}}}{1+\dot{q}^2}$$

и уравнение получается

$$(\dot{q}^2+q\ddot{q})(1+\dot{q}^2) - q\dot{q}^2\ddot{q} = (1+\dot{q}^2)^2$$

довольно страшное, и как решать не очень непонятно. (хотя конечно и решить можно, если помнить стандартный трюк из матанализа, что если где-то в формуле имеется $1+\varphi^2$, или ещё лучше $\sqrt{1+\varphi^2}$, то стоит пробовать замену $\varphi = \operatorname{sh} t$)

Вместо этого попытаемся воспользоваться тем, что лагранжиан не зависит от времени, а значит, энергия должна сохраняться. Что тут будет энергией?

$$E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \frac{q\dot{q}^2}{\sqrt{1+\dot{q}^2}} - q\sqrt{1+\dot{q}^2} = -\frac{q}{\sqrt{1+\dot{q}^2}} = const$$

Это условие уже попроще, гиперболические функции ещё виднее. Решаем:

$$\dot{q}^2 = Cq^2 - 1 \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{ch}(\sqrt{C}t - C_0)$$

Получили цепную линию. То есть общий вид экстремали

$$\widehat{q}(t) = \frac{\operatorname{ch}(At+B)}{A}$$

а параметры A, B определяются положением краевых точек P и Q.
Замечание: Рассмотренная задача, несмотря на свою чисто геометрическую формулировку и происхождение имеет очень простую физическую интерпретацию и множество важных обобщений и приложений например, в теоретической физике. Физическая реализация минимальной поверхности устроена очень просто, это форма которую принимает мыльная плёнка натянутая на жёстко фиксированный каркас, в рассмотренной выше задаче каркас состоял из двух параллельных соосных окружностей. Мыльная плёнка имея сильное поверхностное натяжение пытается "стянуться"и занять как можно меньшую площадь. Когда ей мешает давление попавшего внутрь неё воздуха получается стабильный мыльный пузырь, а когда её края зафиксированы на какой-то поверхности или кривой, то получается минимальная поверхность с заданной границей. Вопрос о существовании и построении минимальной поверхности для заданной граничной кривой называется проблемой Плато. Решение, довольно неожиданно для казалось бы трёхмерной задачи получается комплексно-аналитическими методами.
Замечание: Можно заметить, что не через любые две точки в верхней полуплоскости можно провести цепную линию указанного выше вида. Это отвечает случаям когда экстремаль не является гладкой кривой. А ещё через некоторые конфигурации пар точек проходит не одна цепная линия а две. Можно проверить, что одна из них, нижняя, для функционала площади экстремумом не будет, это будет аналог точки перегиба.

3 Геодезические

3.1 Длины на поверхностях и многообразиях

Рассмотрим (под)многообразие $M \subset \mathbb{R}^3$ с какими-нибудь локальными координатами (u, v). Всякая кривая на M является кривой в $\mathbb{R}^3$ и значит, определена её длина. Теперь можно попробовать определить "длины"векторов и кривых на M условием их совпадания с длинами в $\mathbb{R}^3$. Как выглядит элемент длины в $\mathbf{R}^3$ мы хорошо знаем, это $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.Хотелось бы научиться считать эти длины на M в терминах координат (u, v) внутренней геометрии многообразия, не выходя в $\mathbf{R}^3$. Посмотрим ряд примеров как это устроено в простых случаях.

- $M = \{y - z = 0\}$ - плоскость в $\mathbf{R}^3$. Самые простые координаты можно взять например так: $(u, v) = (x, y)$. Берём кривую $\gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ в M. Какова длина её вектора скорости в объемлющем пространстве? В $\mathbf{R}^3$ кривая имеет вид $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = \big(u(t), v(t), v(t)\big)$ Получаем для вектора скорости:

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) = \dot{u}^2(t) + 2\dot{v}^2(t)$$

Получается, в координатах (u, v) элемент длины имеет вид

$$dl^2 = du^2 + 2dv^2$$

- $M = \{z = f(x, y)\}$ - поверхность в $\mathbb{R}^3$, график какой-то (гладкой) функции. Опять берём те же координаты $(u, v) = (x, y)$, кривую $\gamma(t) = \big(u(t), v(t)\big)$, получаем

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) = \dot{u}^2(t) + \dot{v}^2(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\dot{u}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{v}(t)\right)^2$$

$$dl^2 = \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right)du^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}dudv + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)dv^2$$

- $M = \{g(x, y, z) = 0\}$ этот случай конечно же формально через теорему о неявной функции сводится к предыдущему, но нам полезнее будет рассмотреть его более прямым образом. Итак, пусть (u, v) координаты на M и тогда M можно задать параметрически:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Получаем

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)$$

и соответственно

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = (\dot{u}(t), \dot{v}(t)) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}$$

или

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = \big(\dot{u}(t), \dot{v}(t)\big) \begin{pmatrix} \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} & \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} \\ \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} & \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}$$

где через $\overrightarrow{r}$ обозначен вектор

$$\overrightarrow{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{pmatrix}$$

Таким образом, для элемента длины получаем

$$dl^2 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}dudv + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}dv^2$$

- Самый общий случай – n-мерное (под)многообразие M в $\mathbb{R}^m$. В $\mathbb{R}^m$ координаты $x^1, \cdots, x^m$, на M координаты $q^1, \cdots, q^n$. Совершенно аналогично предыдущему случаю получаем

  $$dl^2 = \sum g_{ij}(\mathbf{q})dq^i dq^j$$

  где $g_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q^j}$. Матрица $G = \{g_{ij}\}$ называется метрикой (вообще-то метрическим тензором) на многообразии M. По нашему построению матрица G симметрична, непрерывно зависит от $\mathbf{q}$, а соответствующая ей квадратичная форма положительно определена. Такие метрики называются римановыми. Всякая матрица G (точнее 2-ковариантное тензорное поле g_{ij}) с указанными свойствами задаёт метрику, то есть определяет какую-то "длину"со всеми обычными свойствами длины на многообразии M.

Пример Рассмотрим сферические координаты (r, φ, θ) в $\mathbb{R}^3$. Элемент длины:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

За многообразие M выберем сферу $r = R_0$. Координаты на ней (в некоторой области) возьмём естественно (φ, θ). Тогда в них $dl^2 = R_0^2(\sin\theta d\varphi^2 + d\theta^2)$ и метрика g_{ij} имеет вид $G = diag(R_0^2 \sin^\theta, R_0^2)$.

3.2 Кратчайшие

Раз мы научились определять длины касательных векторов к многообразию M, а следовательно и длины кривых на нём, то возникает вопрос о существовании и описании кривых наименьшей длины на многообразии, соединяющих две заданные точки. Такие кривые называются геодезическими. (Это одно из возможных эквивалентных определений, подробнее эти объекты будут рассмотрены в курсе дифференциальной геометрии) Как же устроены геодезические на многообразии M с римановой метрикой g_{ij}? Вроде бы понятно что надо делать. Элемент длины как мы уже видели имеет вид $dl^2 = g_{ij}(\mathbf{q})dq^i dq^j$ соответственно функционалом, сопоставляющим кривой $\mathbf{q}(t)$ её длину будет

$$S^*[\mathbf{q}(t)] = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}^i\dot{q}^j}dt$$

Если попробовать выписать уравнения Эйлера-Лагранжа получим

$$\frac{\partial L^*}{\partial q^k} = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^k} = \frac{g_{kj}\dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}}$$

и уравнение получается

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{kj}\dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}}\right) = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}}$$

Если раскрыть левую часть получится что-то очень длинное и не очень понятное. Вместо этого попробуем другой подход. Рассмотрим такой функционал:

$$S^\dagger[\mathbf{q}(t)] = \int_a^b \frac{g_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}^i\dot{q}^j}{2} dt$$

"механический"смысл его совершенно прозрачен – это кинетическая энергия свободной частицы живущей в метрике на поверхности с метрикой g_{ij}. То есть, его экстремали это "прямые"в этой метрике, ведь если частица свободная, сил никаких не действует то она движется равномерно и прямолинейно. Посмотрим на уравнения этих экстремалей.

$$\frac{\partial L^\dagger}{\partial q^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j$$

$$\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} = g_{ik}\dot{q}^i$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i + g_{ik}\ddot{q}^i$$

Хотелось бы посимметричнее. Замечание:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i\right)$$

Получаем

$$g_{ik}\ddot{q}^i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j = g_{ik}\ddot{q}^i + \Gamma_{k,ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = 0$$

где

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\right) \text{ символ Кристоффеля}$$

Если бы мы уже знали дифференциальную геометрию, то немедленно увидели бы что это известное уравнение геодезических, в другом стандартном определении, через параллельный перенос, а не через минимум длины. Давайте проверим что эти кривые будут и геодезическими в смысле нашего определения, то есть докажем следующее утверждение.

Теорема 1 *Если кривая $\widehat{\mathbf{q}}(t)$ является экстремалью функционала $S^\dagger[\mathbf{q}(t)]$, то она будет экстремалью и для функционала $S^*[\mathbf{q}(t)]$*

Видим, что лагранжианы связаны следующим образом $L^* = \sqrt{2L^\dagger}$. Как могут быть связаны их экстремали? Посмотрим как вообще устроен общий случай когда $L^* = f(L^\dagger)$. Обозначим k-ую компоненту левой части уравнения Эйлера-Лагранжа через $Ł^\dagger_k$:

$$L^\dagger_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L^\dagger}{\partial q^k}$$

Тогда

$$L_k^* = \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial f(L^\dagger)}{\partial \dot q^k}\right) - \tfrac{\partial f(L^\dagger)}{\partial q^k} = \tfrac{d}{dt}\left(f'(L^\dagger)\tfrac{\partial L^\dagger}{\partial \dot q^k}\right) - f'(L^\dagger)\tfrac{\partial L^\dagger}{\partial q^k} =$$
$$= f'(L^\dagger)L_k^\dagger + \left(\tfrac{d}{dt}f'(L^\dagger)\right)\tfrac{\partial L^\dagger}{\partial \dot q^k} = f'(L^\dagger)L_k^\dagger + f''(L^\dagger)\tfrac{dL^\dagger}{dt}\tfrac{\partial L^\dagger}{\partial q^k}$$

Смотрим что такое $\frac{dL^\dagger}{dt}$:

$$\frac{dL^\dagger}{dt}=\frac{\partial L^\dagger}{\partial q^i}\dot q^i+\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot q^i}\ddot q^i+\frac{\partial L^\dagger}{\partial t}=\frac{\partial L^\dagger}{\partial q^i}\dot q^i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot q^i}\right)\dot q^i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right)-L_i^\dagger\dot q^i$$

Замечаем, что для наш $L^\dagger$, квадратичен по скоростям, и следовательно

$$\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot q^i}\dot q^i = 2L^\dagger$$

Получается

$$\frac{dL^\dagger}{dt} = \frac{d}{dt}(2L^\dagger) - L_i^\dagger\dot q^i \Rightarrow \frac{dL^\dagger}{dt} = L_i^\dagger\dot q^i \Rightarrow L_k^* = f'(L^\dagger)L_k^\dagger + f''(L^\dagger)\frac{\partial L^\dagger}{\partial q^k}L_i^\dagger\dot q^i$$

И как видно, если для всех k выполняется $L_k^\dagger\big|_{\widehat{\mathbf{q}}} = 0$ то $L_i^*\big|_{\widehat{\mathbf{q}}} = 0$ для всех i. То есть экстремали $S^\dagger$ будут экстремалями и для S^*. Итак геодезические, определяемые как кратчайшие, совпадают с траекториями движения свободной частицы в соответствующей метрике.

Замечание: Чем отличаются экстремали этих двух задач? Тем, что значение функционала S^* зависит только от кривой, способ её пробегания на результат не влияет (если $\widehat{\mathbf{q}}(t)$ экстремаль - кратчайшая - то $\widehat{\mathbf{q}}\big(f(t)\big)$ тоже будет экстремалью), экстремали же функционала $S^\dagger$ дают не только траекторию движения частицы, но и динамику, то есть они привязаны к "собственному времени"частицы. Что такое собственное время в терминах S^*? Это такая параметризация кривой, при которой модуль вектора скорости постоянен, ("свободная"частица движется "равномерно"!) или, что то же самое, параметризация длиной кривой или её натуральным параметром.

4 Задачи, которые надо уметь решать после этой лекции:

Задача: *Найти метрику, лагранжиан, первые интегралы и выписать уравнения геодезических на поверхности вращения $f(r,z)=0$, где (r,φ,z) цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$*

Задача: *Показать, что на заданной выше поверхности вращения для фиксированной геодезической пересекает все параллели $r\cos\psi = const$ где ψ угол между геодезической и параллелью.*

Задача: *Показать, что на поверхности вращения параллель будет являться геодезической если и только если касательные к меридианам в её точках параллельны оси вращения.*

Задача: *Показать, что пересечение однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1$ с плоскостью $z = const \neq 0$ не является геодезической на этом гиперболоиде*