Листок 1. Связность в векторном расслоении

спецкурс “Аналитическая теория дифференциальных уравнений”, **16.02.2015**

1◇1 Докажите, что расслоение $O(k)$ тогда и только тогда имеет голоморфные, не обращаущиеся в ноль тождественно, сечения, когда $k \geqslant 0$.

1◇2 Для любого векторного расслоения F с коциклом $\{g_{ij}\}$ *детерминантным расслоением* называется расслоение F', заданное коциклом $\{\det g_{ij}\}$.
а) Докажите, что если F тривиально, то и F' тривиально.
б) Проверьте, что если набор формы $\{\omega^i\}$ определяет связность в F, то набор форм $\{\mathrm{tr}\omega^i\}$ определяет связность в F'.
Указание: воспользуйтесь формулой Лиувилля

$$d \det Y = \mathrm{tr}\omega \det Y,$$

где Y – фундаментальная матрица системы $dy = \omega y$.

1◇3 Найдите типы расщепления следующих расслоений:
а) $F_1 : \left(O_0 = \mathbb{C},\, O_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus 0,\, g_{0\infty} = \begin{pmatrix} z & a \\ 0 & 1/z \end{pmatrix}\right)$;
б) $F_2 : \left(O_0 = \mathbb{C},\, O_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus 0,\, g_{0\infty} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ a & 1/z \end{pmatrix}\right)$, $a \in \mathbb{C}$;
в) $F_3 : \left(O_0 = \mathbb{C},\, O_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus 0,\, g_{0\infty} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$;
$F_4 : \left(O_0 = \mathbb{C},\, O_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus 0,\, g_{0\infty} = \begin{pmatrix} 1 & z^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
При каких значениях a голоморфно тривиально расслоение F_1 и при каких F_2?

1◇4 Во всяком ли гладком векторном расслоении можно ввести связность?

1◇5 Докажите, что в гладком векторном расслоении можно ввести плоскую связность тогда и только тогда, когда коцикл $\{g_{ij}\}$ можно выбрать так, что $g_{ij}(x) = \mathrm{const}$ при всех i и j.

1◇6 Докажите, что множество расслоений, имеющих тип расщепления $(k_1, \ldots, k_n)$, **а)** открыто и всюду плотно, если выполнено условие $k_1 - k_n \leqslant 1$; **б)** а иначе замкнуто и нигде не плотно.

Обозначим $\Omega_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 \neq z_2\}$. Ковариантное дифференцирование на тривиальном k-мерном расслоении $\Omega_2 \times \mathbb{C}^k$ задается формулой $\nabla w = dw - \frac{A}{z_1 - z_2}(dz_1 - dz_2)w$, где $w(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^k$ — сечение, а $A : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ — линейный оператор.

1◇7 Вычислите явно параллельный перенос вдоль кривой $\gamma(t) = (z_1(t), z_2(t))$. Докажите, что ковариантное дифференцирование ∇ плоское, и вычислите монодромию.