

Дискретная математика

Семинар 6

ВШЭ, факультет математики

первый курс, третий модуль

Произведением Адамара производящих функций $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$ и $B(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots$ называется производящая функция $A \odot B(s) = a_0b_0 + a_1b_1s + a_2b_2s^2 + \dots$.

1. Найдите квадрат Адамара производящей функции $\frac{1}{1-s-s^2}$.

2. Найдите произведения Адамара функций от s

$$(1 - qs)^{-1} \odot (1 - rs)^{-1}.$$

3. Найдите произведения Адамара функций от s

$$(1 - qs)^{-k} \odot (1 - rs)^{-l}.$$

4. Найдите производящие функции и линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами для следующих последовательностей, заданных квазимногочленами:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n; \quad b_n = (1 + 2n)2^n + 1 + n + n^2; \quad c_n = (1 + n + n^2)3^n.$$

5. Найдите представление в виде суммы элементарных дробей следующих рациональных функций:

$$\frac{1}{2 - s - s^2}; \quad \frac{1 + 2s}{1 - s - 2s^2}; \quad \frac{1 + s}{1 - s + s^2 - s^3}.$$

6. Для следующих последовательностей, заданных неоднородными линейными рекуррентными соотношениями, найдите задающие их однородные линейные рекуррентные соотношения и производящие функции:

$$a_{n+1} = a_n + 2, \quad a_0 = 1; \quad a_{n+2} = a_n + n + 1, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0;$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + n^2 + 1, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$