

Задачи для семинара № 18
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

**Собственные числа и векторы пары квадратичных форм,
поверхности второго порядка в трёхмерном пространстве.**

Задача 1. Найти угол между подпространствами

$$U = \langle (0, -1, 0, 1), (0, 1, 0, 2) \rangle, \quad W = \langle (2, 2, 1, 0), (1, -2, 2, 0) \rangle$$

евклидова пространства \mathbb{R}^4 со стандартным скалярным произведением с помощью теоремы о связи угла между подпространствами и собственных чисел пары квадратичных форм (*косинус угла между U и W равен $\sqrt{\lambda_{\max}}$, где λ_{\max} — наибольшее собственное число пары квадратичных форм*

$$f(u, u) = (\text{pr}_W u, \text{pr}_W u), \quad g(u, u) = (u, u)$$

заданных на векторном пространстве U , а pr_W — ортогональный проектор на W .)

Найти такую пару векторов $u \in U$, $w \in W$, что угол между ними равен углу между U и W . *Указание: используйте собственный вектор пары форм f , g .*

Задача 2. Определить тип поверхности, её каноническое уравнение и каноническую систему координат:

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0.$$

Задача 3. Определить тип поверхности, её каноническое уравнение и каноническую систему координат:

$$2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0.$$

Задача 4. Верно ли, что любую пару квадратичных форм можно невырожденным линейным преобразованием привести к диагональному виду? Можно ли это сделать с парой форм $(x^1)^2 + 4x^1x^2 - (x^2)^2$ и $(x^1)^2 + 8x^1x^2 + 5(x^2)^2$?

Задача 5. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа пары квадратичных форм φ и $\psi > 0$, которые в некотором базисе задаются матрицами F и G соответственно. Выразить произведение $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ через F и G .

Задача 6. Для данной пары квадратичных форм выяснить, какая из них положительно определена, и найти линейное преобразование координат, приводящее положительно определённую форму к нормальному виду, а другую форму к каноническому виду:

$$f = (x^1)^2 + 6(x^2)^2 - 2(x^3)^2 + 6x^1x^2 + 2x^2x^3, \\ g = (x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 2(x^3)^2 + 2x^1x^2 - 2x^2x^3.$$

Задача 7. Две квадратичные формы f и g называются ортогонально эквивалентными, если от одной из них можно перейти к другой посредством ортогонального преобразования координат. Доказать, что две квадратичные формы ортогонально эквивалентны тогда и только тогда, когда их совпадают характеристические многочлены их матриц.

Задача 8. Рассмотрим две пары квадратичных функций f_1, g_1 и f_2, g_2 , где g_1 и g_2 положительно определены. Доказать, что невырожденное линейное преобразование, переводящее f_1 в f_2 , а g_1 в g_2 существует тогда и только тогда, когда собственные числа пар форм f_1, g_1 и f_2, g_2 совпадают.

Задача 9. Доказать, что если к положительно определённой квадратичной форме добавить квадрат ненулевой линейной функции, то определитель матрицы квадратичной формы увеличится.

Задача 10. По какой линии пересекаются эллиптический параболоид $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, $p > q > 0$, и сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2pz$?