

Контрольная № 8
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

Вариант 1

Задача 1. Найдите нормальную форму квадратичной формы

$$(x^1)^2 - 3(x^2)^2 + 4(x^3)^2 + 6x^1x^2 + 8x^1x^3 - 2x^2x^3$$

при помощи теоремы Якоби.

Задача 2. Найти угол между векторами $(1, i)$ и $(-i, 2)$ унитарного пространства \mathbb{C}^2 со стандартным эрмитовым скалярным произведением.

Задача 3. При помощи процесса ортогонализации Грама-Шмидта и последующей нормализации найдите ортонормированный базис в подпространстве

$$U = \langle (1, 2, 0, -1), (3, -6, 1, 3), (-4, 5, -1, 0) \rangle$$

евклидова пространства \mathbb{R}^4 со стандартным скалярным произведением.

Задача 4. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис для самосопряжённого оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Доказать, что у положительно определённой квадратичной формы все коэффициенты при квадратах положительны, но это условие не является достаточным для положительной определённости квадратичной формы.

Контрольная № 8
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

Вариант 2

Задача 1. Найти эрмитово разложение (то есть представление в виде $A+iB$, где A и B самосопряжённые операторы) для оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2+i & 7+3i \\ 5-i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найти угол между вектором $v = (5, -1, 3, 5)$ и подпространством $W = \langle (4, -2, -2, 0), (5, -10, 8, 3) \rangle$ в евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^4 со стандартным скалярным произведением.

Задача 3. Проверить, что оператор, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

в стандартном базисе унитарного пространства \mathbb{C}^2 со стандартным эрмитовым скалярным произведением, является унитарным оператором. Найдите его канонический вид и соответствующий унитарный базис.

Задача 4. Найдите нормальную форму квадратичной формы

$$-(x^1)^2 - 4(x^2)^2 + 2(x^3)^2 + 8x^1x^2 - 10x^2x^3$$

при помощи теоремы Якоби.

Задача 5. Доказать, что два самосопряжённых оператора коммутируют тогда и только тогда, когда существует ортонормированный (унитарный) базис, в котором оба оператора диагонализуются.

Контрольная № 8
Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

Вариант 3

Задача 1. Найти длину вектора $(1, -i)$ унитарного пространства \mathbb{C}^2 с эрмитовым скалярным произведением, заданным матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найти полярное разложение оператора

$$\begin{pmatrix} 3+i & 1+3i \\ 3-i & 1-3i \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Является ли положительно определённой квадратичная форма

$$(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 5(x^3)^2 - 2x^1x^2 - 2x^1x^3 - 2x^2x^3?$$

Задача 4. Найти матрицу ортогонального проектора на подпространство евклидова пространства \mathbb{R}^3 со стандартным скалярным произведением, заданное уравнением $x^1 + x^2 - x^3 = 0$.

Задача 5. Может ли матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

быть матрицей самосопряжённого оператора в некотором (не обязательно ортонормированном) базисе?