

**Контрольная № 6**  
**Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014**

**Вариант 1**

**Задача 1.** Найти уравнение кривой второго порядка, заданной параметрическими уравнениями

$$x(t) = \frac{t+1}{(t-2)^2}, \quad y(t) = \frac{t+2}{(t-2)^2}.$$

**Задача 2.** Найти любую рациональную параметризацию кривой

$$x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y = 0.$$

**Задача 3.** Найти проективное преобразование, которое переводит прямые

$$x + y + 2 = 0, \quad x - y - 4 = 0, \quad x - 4y + 3 = 0$$

соответственно в прямые

$$x + 3y + 2 = 0, \quad x - 3y + 4 = 0, \quad x + 2y - 3 = 0$$

и оставляет на месте точку  $(0, 0)$ .

**Задача 4.** Дать определение кратности пересечения прямой с алгебраической кривой и привести пример пересечения прямой и квадрики кратности 2.

**Задача 5.** Существуют ли квадрики, уравнения которых имеют целые коэффициенты, которые не проходят ни через одну точку с рациональными координатами? Объясните ответ.

**Контрольная № 6**  
**Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014**

**Вариант 2**

**Задача 1.** Найти уравнение кривой второго порядка, заданной параметрическими уравнениями

$$x(t) = \frac{t(t+2)}{t+3}, \quad y(t) = \frac{t^2+3t+2}{t+3}.$$

**Задача 2.** Найти любую рациональную параметризацию кривой

$$xy - 2x + 2y - 2 = 0.$$

**Задача 3.** Найти проективное преобразование, которое переводит окружность  $x^2 + y^2 = 25$  в себя, а точки  $A = (3, -4)$ ,  $B = (3, 4)$  и середину  $M$  хорды  $AB$  — в точки  $A' = (-4, 3)$ ,  $B' = (-4, -3)$  и середину  $M'$  хорды  $A'B'$ .

**Задача 4.** Дать определение диаметра, сопряжённого направлению, и привести пример квадрики, направления и сопряжённого ему диаметра.

**Задача 5.** Может ли быть так, что все диаметры квадрики параллельны друг другу? Объясните ответ.

**Контрольная № 6**  
**Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014**

**Вариант 3**

**Задача 1.** Найти уравнение кривой второго порядка, заданной параметрическими уравнениями

$$x(t) = \frac{t(t-2)}{t^2-2t+2}, \quad y(t) = \frac{2t-2}{t^2-2t+2}.$$

**Задача 2.** Найти любую рациональную параметризацию кривой

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 6 = 0.$$

**Задача 3.** Найти проективное преобразование, которое переводит эллипс

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

в тот же эллипс, а точки эллипса  $A = (0, 5)$ ,  $B = (-10, 0)$  и  $C = (8, 3)$  — соответственно в точки  $A' = (0, -5)$ ,  $B' = (0, 5)$  и  $C' = (10, 0)$ .

**Задача 4.** Привести оба данных на лекциях определения центра квадрики. Совпадают ли они для параболы? Объясните ответ.

**Задача 5.** Докажите, что любая окружность проходит через круговые точки.

**Контрольная № 6**  
**Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014**

**Вариант 4**

**Задача 1.** Найти уравнение кривой второго порядка, заданной параметрическими уравнениями

$$x(t) = \frac{t}{(t-3)^2}, \quad y(t) = \frac{t+1}{(t-3)^2}.$$

**Задача 2.** Найти любую рациональную параметризацию кривой

$$x^2 + 4y^2 - 2y - 1 = 0.$$

**Задача 3.** Найти проективное преобразование, которое параболу  $y^2 = 4x$  переводит в окружность  $x^2 + y^2 = 25$ , а точки параболы  $A = (4, -4)$ ,  $B = (0, 0)$ ,  $C = (4, 4)$  переводит соответственно в точки  $A' = (0, -5)$ ,  $B' = (5, 0)$ ,  $C' = (0, 5)$ .

**Задача 4.** На лекциях было дано определение фокусов с помощью касательных, проходящих через круговые точки. Найдите с помощью этого определения фокусы параболы  $y^2 = 2x$ .

**Задача 5.** Можно ли проективным преобразованием перевести параболу в эллипс? Объясните ответ.

**Контрольная № 6**  
**Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014**

**Вариант 5**

**Задача 1.** Найти уравнение кривой второго порядка, заданной параметрическими уравнениями

$$x(t) = \frac{2t + 2}{(2t - 1)^2}, \quad y(t) = \frac{2t + 3}{(2t - 1)^2}.$$

**Задача 2.** Найти любую рациональную параметризацию кривой

$$x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 2y = 0.$$

**Задача 3.** Найти общий вид тех проективных преобразований, при которых гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

переходит в ту же гиперболу, а касательные в вершинах переходят в её асимптоты.

**Задача 4.** Дайте определение главных осей квадрики. Может ли быть так, что любая прямая, проходящая через центр, является главной осью квадрики? Объясните ответ.

**Задача 5.** Существует ли проективное преобразование, переводящее пару пересекающихся прямых в пару параллельных прямых? Объясните ответ.

**Контрольная № 6**  
**Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014**

**Вариант 6**

**Задача 1.** Найти уравнение кривой второго порядка, заданной параметрическими уравнениями

$$x(t) = \frac{t(t-2)}{t+1}, \quad y(t) = \frac{t(t-1)}{t+1}.$$

**Задача 2.** Найти любую рациональную параметризацию кривой

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

**Задача 3.** Найти общий вид тех проективных преобразований, которые

- а) переводят прямую  $x^3 = 0$  в прямую  $x^3 = 0$ ;
- б) оставляют на месте все точки прямой  $x^3 = 0$ .

Привести пример преобразования, удовлетворяющему условию а), но не удовлетворяющего условию б).

**Задача 4.** Дайте определение поляры и полюса, приведите уравнение поляры. Докажите, что если полюс первой прямой лежит на второй прямой, то полюс второй прямой лежит на первой прямой.

**Задача 5.** Сколько существует вещественных проективных типов квадрик? Приведите их названия и примеры квадрик соответствующего типа.