Задачи по группам и алгебрам Ли – 8. Полупростые компактные группы и алгебры Ли.

Зачет по данному листку ставится в случае сдачи 80% пунктов задач без звездочки. Задачи со звездочкой стоят вдвое дороже. Дедлайн 10 марта.

1. а) Докажите, что на всякой связной компактной группе Ли есть единственная с точностью до пропорциональности дифференциальная форма старшей степени, инвариантная относительно как левого, так и правого действия группы на себе. Обозначим эту форму dg. **б)** Докажите, что для любого представления $\rho : G \to GL(V)$ компактной группы G в вещественном или комплексном пространстве V оператор $P := \frac{\int_G \rho(g)dg}{\int_G dg} : V \to V$ корректно определен и является проектором на подпространство G-инвариантов $V^G \subset V$.

2. а) Докажите, что на всяком вещественном представлении компактной группы Ли есть инвариантная положительно определенная квадратичная форма, а на всяком комплексном представлении – инвариантная эрмитова форма. **б)** Докажите, что все (вещественные или комплексные) представления компактной группы Ли вполне приводимы. *Указание:* нужно к всякому подпредставлению найти инвариантное дополнение. В качестве дополнения можно взять ортогональное дополнение относительно инвариантного скалярного произведения.

Вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *компактной*, если на $\mathfrak{g}$ есть инвариантное положительно определенное скалярное произведение.

3. а) Докажите, что разрешимая связная компактная группа Ли абелева. **б)** Докажите, что форма Киллинга алгебры Ли компактной группы неположительно определена. **в)** Докажите, что алгебра Ли компактной группы есть прямая сумма абелевой алгебры Ли и полупростой вещественной алгебры Ли с отрицательно определенной формой Киллинга. *Указание:* во всех пунктах имеет смысл пользоваться инвариантным положительно определенным скалярным произведением на представлении компактной группы Ли.

4. а) Докажите, что группа автоморфизмов полупростой компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ компактна, а ее алгебра Ли есть $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. **б)** Докажите, что $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ – идеал в $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. **в)** Докажите, что $\mathfrak{g} = \operatorname{Der}\mathfrak{g}$. *Указание:* Так как группа $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ компактна, то $\operatorname{Der}\mathfrak{g} = \operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \oplus I$ как представление алгебры Ли $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$, а следовательно всякий элемент из I действует нулем на $\mathfrak{g}$. **г)** Докажите, что компактной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ соответствует хотя бы одна связная компактная группа Ли G такая, что $T_eG = \mathfrak{g}$.

5. Связная компактная группа Ли G действует на гладком многообразии X. **а)** Докажите, что подпространство G-инвариантныхдифференциальных форм $\Omega^*(X)^G \subset \Omega^*(X)$ замкнуто относительно дифференциала де Рама. **б)** Пусть ω – замкнутая форма на X. Докажите, что для любого $g \in G$ форма $g^*\omega$ представляет тот же класс когомологий, что и ω. **в)** Докажите, что G-инвариантный проектор из задачи 1б $P : \Omega^*(X) \to \Omega^*(X)^G$ является гомоморфизмом комплексов, дающим изоморфизм в когомологиях.

6. Пусть G – связная компактная группа Ли. **а)** Докажите, что как градуированное векторное пространство комплекс левоинвариантных дифференциальных форм на G изоморфен $\Lambda^*(\mathfrak{g}^*)$, а комплекс биинвариантных форм (т.е. инвариантных относительно как левого, так и правого действия) изоморфен $\Lambda^*(\mathfrak{g}^*)^{\operatorname{Ad} G}$. **б*)** Пользуясь формулой Картана для дифференциала де Рама, выразите дифференциал в комплексе левоинвариантных форм на G через операцию коммутатора в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Этот комплекс $\Lambda^*(\mathfrak{g}^*)$ определен для любой алгебры Ли и называется *комплексом Шевалле.* **в*)** Докажите, что дифференциал в комплексе биинвариантных форм на группе G тождественно нулевой. Таким образом, $H^*(G, \mathbb{R}) = \Lambda^*(\mathfrak{g}^*)^{\operatorname{Ad} G}$

Группа Ли называется *полупростой*, если ее алгебра Ли полупроста.

7. а) Докажите, что всякая связная группа Ли G есть фактор связной односвязной группы Ли $\tilde{G}$ по центральной дискретной подгруппе, изоморфной $\pi_1(G)$ (в частности, $\pi_1(G)$ абелева и, таким образом, изоморфна $H_1(G,\mathbb{Z})$). **б*)** Докажите, что фундаментальная группа $\pi_1(G)$ полупростой компактной группы Ли G конечна. *Указание:* пользуясь задачей 6а, докажите, что $H_1(G,\mathbb{R}) = 0$, а следовательно $H_1(G,\mathbb{Z})$ конечна. **в)** Докажите, что всякая связная группа, отвечающая компактной полупростой алгебре Ли, компактна.

8. Найдите все компактные группы с алгеброй Ли **а)** $\mathfrak{u}_2$; **б)** $\mathfrak{so}_4(\mathbb{R})$; **в)** $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$; **в)** $\mathfrak{su}_n$; **г)** $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{R})$; **д*)** $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{R})$.

9*. а) Постройте ненулевой инвариантный элемент в $\Lambda^3(\mathfrak{g}^*)$ для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. **б)** Докажите, что для всякой полупростой компактной группы Ли G ранг группы $H^3(G)$ равен количеству простых факторов ее алгебры Ли.

Тором называется связная компактная абелева группа Ли.

10. а) Докажите, что всякий тор изоморфен прямому произведению нескольких копий S^1. **б)** Докажите, что во всяком торе T найдется такой элемент t, что $T = \overline{\{t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}}$. Такой элемент называется *образующей* тора T. *Указание:* надо построить элемент $t \in T$ так, чтобы его степени попадали в любое открытое подмножество T. Пользуясь счетной базой открытых подмножеств T и тем, что для любого открытого $U \subset T$ существует N такое, что $U^N = T$, постройте такой элемент как общую точку вложенных замкнутых подмножеств T.

Максимальным тором компактной группы Ли G называется подгруппа Ли $T \subset G$, являющаяся тором, и максимальная по включению с таким свойством.

11. Укажите какой-нибудь максимальный тор в группе Ли **а)** SU_n; **б)** $SO_n(\mathbb{R})$.

12. а) Докажите, что алгебра Ли максимального тора совпадает со своим нормализатором. **б)** Пусть $N(T)$ – нормализатор максимального тора T в связной компактной группе Ли G. Докажите, что группа $W = N(T)/T$ конечна. Эта группа называется *группой Вейля*.

Имеет место следующая **Теорема**: Пусть T –максимальный тор в связной компактной группе Ли G. Тогда всякий элемент $g \in G$ лежит в некотором максимальном торе вида hTh^{-1}, где $h \in G$.

13. Выведите из этой теоремы, что **а*)** максимальный тор в связной компактной группе Ли является максимальной по включению абелевой подгруппой (*указание:* пусть $g \in G$ перестановочен с любым элементом тора T. Докажите, что для некоторого $N \in \mathbb{Z}$ элемент g^N лежит в T, затем примените Теорему к элементу $t \in T$, такому, что $(gt)^N$ есть образующая тора T); **б)** все максимальные торы связной компактной группы Ли сопряжены; **в)** группа $W = N(T)/T$ действует на T сопряжениями, и это действие эффективно (т.е. имеет тривиальное ядро); **г)** центр связной компактной группы Ли совпадает с пересечением всех ее максимальных торов.

14. а) Докажите, что всякая функция на группе Ли G, постоянная на классах сопряженности, однозначно определяется своим ограничением на T; **б)** это ограничение инвариантно относительно W; **в*)** всякая функция на T, инвариантная относительно действия группы W, является ограничением функции на G, постоянной на классах сопряженности. *Указание:* надо доказать, что если $t_1, t_2 \in T$ таковы, что $t_1 = ht_2h^{-1}$ для некоторого $h \in G$, то они сопряжены и при помощи элемента нормализатора тора T. Воспользуйтесь тем, что тор T сопряжен тору hTh^{-1} в компактной группе $H := \{g \in G \mid gt_2 = t_2g\}$.