Листок 8. Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции

Анализ, 2 курс, **24.02.2015**

8⋄1 Пусть $f(x) \in BV([a,b])$. Докажите, что **а)** $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ всюду, кроме не более чем счётного множества точек, в которых она имеет разрывы первого рода; **б)** $f'(x)$ существует п.в. на (a,b); **в)** $f'(x) \in L((a,b))$.

8⋄2 Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Докажите, что $f(x) \in BV([a,b])$ тогда и только тогда, когда существует такая неубывающая функция $g(x)$ на $[a,b]$, что $|f(x) - f(y)| < g(y) - g(x)$ для любого отрезка $[x,y] \subseteq [a,b]$.

8⋄3 Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, а $\varphi(x)$ – строго возрастающая непрерывная функция на $[a,b]$, причём $\varphi(a) = a$ и $\varphi(b) = b$. Докажите, что $f(x) \in BV([a,b])$ тогда и только тогда, когда $f(\varphi(x)) \in BV([a,b])$.

8⋄4 **а)** Пусть f и g из $BV([a,b])$. Докажите, что $f(x) \cdot g(x) \in BV([a,b])$ и

$$V_a^b(fg) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \cdot V_a^b(f) + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \cdot V_a^b(g).$$

б) Пусть $f, g \in BV([a,b])$ и $|f(x)| \geqslant C > 0$ при $x \in [a,b]$. Докажите, что $\frac{g(x)}{f(x)} \in BV([a,b])$.

в) Найдите положительные функции $f(x), g(x) \in BV([0,1])$ для которых $\frac{f(x)}{g(x)} \notin BV([0,1])$.

8⋄5 Докажите, что функция $h(f) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + V_a^b(f)$ является нормой на пространстве $BV([a,b])$.

Скажем, что функция $f(x)$ на $[a,b]$ обладает N-*свойством Лузина* на этом отрезке, если для любого измеримого относительно классической меры Лебега λ множества $E \subset [a,b]$ с $\lambda(E) = 0$ множество $f(E)$ измеримо и $\lambda(f(E)) = 0$.

8⋄6 Пусть $f(x) \in AC([a,b])$. Докажите, что $f(x)$ обладает N-свойством Лузина на $[a,b]$.

8⋄7 Пусть $f(x) \in C([a,b])$. Докажите, что $f(E)$ измеримо (относительно классической меры Лебега) для любого измеримого (в том же смысле) $E \subset [a,b]$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ обладает N-свойством Лузина на $[a,b]$.

8⋄8 (*Теорема Банаха-Зарецкого.*) Пусть $f(x) \in C([a,b]) \cap V([a,b])$ и $f(x)$ обладает N-свойством Лузина на $[a,b]$. Доказать, что $f(x) \in AC([a,b])$.

8⋄9 Пусть имеется отрезок $[0,1]$. Выбрасываем из середины отрезок длины $1/4$ потом из каждой середины по отрезку длины $1/16$ и т.д. Осталось канторово множество положительной меры. Построим по полученному канторову множеству канторову лестницу.

а) Будет ли она Липшицевой?

б) Какая у нее производная почти всюду в точках канторова множества?