

Дискретная математика

Семинар 7

ВШЭ, факультет математики
первый курс, третий модуль

1. Рациональны ли производящие функции для последовательностей $a_n = n$; $a_n = (n + 1)(n + 2)$; $a_n = n^2$; $a_n = 1/n^2$?

Найдите соответствующие производящие функции в тех случаях, когда они рациональны.

2. Найдите представление в виде квазимногочлена и линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами для коэффициентов следующих степенных рядов:

$$\frac{1}{1 - s - 2s^2}; \quad \frac{1 + 2s}{1 - 3s - 4s^2}; \quad \frac{1 + 2s}{1 - 3s^3}.$$

3. Докажите, что производящая функция $\ln(1 - s)$ не является рациональной.

4. Найдите производящие функции и линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами для следующих последовательностей, заданных квазимногочленами:

$$a_n = (3 + n)4^n - (1 + 3n)2^n; \quad b_n = (1 + n^2)2^n + 1 + n + n^2.$$

5. Найдите представление в виде суммы элементарных дробей следующих рациональных функций:

$$\frac{2x^2 + 1}{(x - 1)^2(x^2 + 1)}.$$

6. Обозначим через a_n число разбиений полосы шириной 3 и длиной n квадратиков на домино 1×2 . Например, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$. Найдите производящую функцию для последовательности a_n .