Дискретная математика
Листок 4

ВШЭ, факультет математики
первый курс, третий модуль

Листок можно сдавать до 17.03.2014.

1. Рассмотрим множество путей на плоскости, состоящих из векторов $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$. Найдите производящую функцию для числа таких путей длины n, начинающихся в 0 и несамопересекающихся (т.е. векторы $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ не могут идти непосредственно друг за другом).

2. Найдите произведение Адамара производящей функции для чисел Каталана и производящих функций $(1-s)^{-1}$, $(1-s)^{-2}$, $(1-s)^{-3}$.

3. Докажите, что производящая функция для чисел Каталана допускает следующее разложение:

$$C(s) = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{C_n s^n}{(1-4s)^n}.$$

4. Докажите обобщённую лемму Рени: пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – последовательность целых чисел, такая что $x_j \leq 1$ при всех j и $x_1 + \cdots + x_m = l > 0$. Тогда ровно l циклических сдвигов этой последовательности имеют только положительные частичные суммы.

5. Докажите, что производящая функция, обратная к функции $G(s) = s + s^2$ (т.е. функция, выражающая s через $t = G(s)$), не является рациональной.

6. Докажите, что число диаграмм Юнга, являющихся подмножествами диаграммы $(n-1, n-2, \ldots, 1)$, равно n-ому числу Каталана.

7. Путём Моцкина называется непрерывная ломаная в верхней полуплоскости, составленная из векторов $(1, 1)$, $(1, -1)$ и $(1, 0)$, начинающаяся в начале координат и заканчивающаяся на оси абсцисс. Число путей Моцкина из n векторов называется n-м числом Моцкина и обозначается через m_n. Например, $m_0 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 4$. Найдите рекуррентное соотношение и производящую функцию для чисел Моцкина.

8. Определим числа f_n по формуле $f_{n+2} = \frac{6}{5}f_{n+1} - f_n$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Докажите, что $f_n < \frac{5}{4}$.

9. Пусть $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \cdots + c_k a_n$, $c_i \in \mathbb{Z}$. Докажите, что если последовательность a_n целочисленна и ограничена, то она периодична (начиная с некоторого номера). Можно ли отбросить условие целочисленности?

10. Пусть $f(n)$ – число пар перестановок (u, v) из S_n, таких что $u^2 = v^2$. Докажите, что экспоненциальная производящая функция чисел $f(n)$ равна $\prod_{i\geq 1}(1-x^i)^{-1}$.