

Задачи по группам и алгебрам Ли – 9. Веса и корни.

Зачет по данному листку ставится в случае сдачи 80% пунктов задач без звездочки. Задачи со звездочкой стоят вдвое дороже. Дедлайн 20 марта.

- 1. а)** Докажите, что всякое комплексное представление окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ является прямой суммой одномерных представлений вида $z \mapsto z^k$, где $k \in \mathbb{Z}$. **б)** Докажите, что неприводимые комплексные представления n -мерного тора нумеруются элементами n -мерной решетки. Эта решетка называется *решеткой характеров* или *решеткой весов* данного тора. **в)** Докажите, что взятие дифференциала одномерного представления в единице есть вложение решетки характеров тора в двойственное пространство его алгебры Ли.

В дальнейшем G – связная полупростая компактная группа Ли, T – ее максимальный тор, $\mathfrak{g} := T_e G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ – комплексификация алгебры Ли группы G , $\mathfrak{h} := T_e T \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ – комплексификация алгебры Ли максимального тора. *Весами* группы Ли G называются веса его максимального тора. Согласно задаче 1в, веса группы G образуют решетку X в пространстве \mathfrak{h}^* . Согласно задаче 1а, присоединенное представление \mathfrak{g} группы G относительно тора T раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in X} \mathfrak{g}_\alpha$ так, что $\text{Ad}(t)v = \alpha(t)v$ для $t \in T$, $v \in \mathfrak{g}_\alpha$. Веса $\alpha \in X$, для которых $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$, называются *корнями* алгебры Ли \mathfrak{g} . Множество всех ненулевых корней алгебры Ли называется *системой корней* и обозначается $\Delta \subset X$.

- 2. а)** Докажите, что решетка весов и множество корней связной компактной группы Ли не зависят от выбора максимального тора. **б)** Докажите, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. **в)** Докажите, что Δ является полной системой в пространстве \mathfrak{h}^* .

Подрешетка, порожденная корнями, в решетке весов группы G называется *решеткой корней* группы G .

- 3. а)** Докажите, что центр связной компактной группы Ли совпадает с пересечением всех ее максимальных торов. **б*)** Докажите, что центр связной односвязной компактной группы Ли изоморчен факто-ру ее решетки весов по решетке корней.

- 4.** Нарисуйте на плоскости решетку весов и отметьте корни для групп **а)** SU_2 ; **б)** $SO_3(\mathbb{R})$; **в)** SU_3 ; **г)** PSU_3 ; **д)** $SO_4(\mathbb{R})$; **е*)** $SO_5(\mathbb{R})$.

- 5.** Опишите систему корней группы Ли **а)** SU_n ; **б*)** $SO_{2n+1}(\mathbb{R})$; **в*)** $SO_{2n}(\mathbb{R})$.

- 6.** Пользуясь инвариантностью формы Киллинга, докажите, что **а)** для $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_\beta$ если $(x, y) \neq 0$, то $\alpha + \beta = 0$; **б)** форма Киллинга задает невырожденное спаривание между \mathfrak{g}_α и $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ (в частности, ограничение формы Киллинга на подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ невырожденно); **в)** $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Согласно задаче 1, решетка весов вложена в пространство \mathfrak{h}^* . Согласно задаче 6, ограничение формы Киллинга на пространство \mathfrak{h} невырожденно, поэтому задает изоморфизм $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^*$.

- 7.** Докажите, что на решетке весов $X \subset \mathfrak{h}$ форма Киллинга задает положительно определенное скалярное произведение.

- 8. а)** Пусть $\alpha \in \Delta$ и $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ таковы, что $(x, y) \neq 0$. Докажите, что $[x, y] \neq 0$. *Указание:* вычислите скалярное произведение $([x, y], h)$ для $h \in \mathfrak{h}$. **б)** Докажите, что линейная оболочка элементов $x, y, [x, y]$ замкнута относительно операции коммутатора и (как алгебра Ли) изоморфна \mathfrak{sl}_2 . Эта подалгебра называется *корневой* \mathfrak{sl}_2 . **в)** Пусть $e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha$ – стандартные образующие этой \mathfrak{sl}_2 , такие, что $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Докажите, что оператор $\text{ad } h_\alpha$ действует на \mathfrak{g}_β с собственным значением $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$.

9. Пользуясь теорией представлений корневой \mathfrak{sl}_2 , докажите, что **a)** для любых двух корней α, β , число $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ целое, и $\gamma = \beta - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ – тоже корень; **б)** для пропорциональных элементов Δ коэффициент пропорциональности равен ± 1 ; **в)** для $\alpha \in \Delta$ имеем $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$;

Линейное отображение $s_\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$, $v \mapsto v - \frac{2(\alpha, v)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ называется *отражением в корне* α . Группой Вейля данной системы корней называется группа W линейных преобразований пространства \mathfrak{h} , порожденная отражениями во всех корнях (это определение отличается от данного в предыдущем листке, и утверждение об их эквивалентности является содержательной теоремой).

10. а) Докажите, что всякое отражение лежит в образе группы $N(T)/T$, действующей на пространстве \mathfrak{h} . **б)** Докажите, что группа Вейля системы корней компактной группы Ли конечна.

11. а) Докажите, что группа Вейля группы SU_n изоморфна симметрической группе S_n ; **б*)** Докажите, что группа Вейля группы $SO_{2n+1}(\mathbb{R})$ изоморфна полуправому произведению симметрической группы S_n на $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. **в*)** Докажите, что группа Вейля группы $SO_{2n}(\mathbb{R})$ изоморфна полуправому произведению симметрической группы S_n на $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$.

12. Симплектической группой Sp_{2n} называется группа всех линейных операторов в $2n$ -мерном пространстве, сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму. **а)** Опишите касательную алгебру симплектической группы и найдите ее размерность. **б)** Докажите, что группа $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ связна и односвязна. **в)** Докажите, что унитарная группа n -мерного кватернионного пространства $U_n(\mathbb{H})$ (т.е. группа таких \mathbb{H} -линейных преобразований A пространства \mathbb{H}^n , что $\bar{A}^T = A^{-1}$) лежит в $Sp_{2n}(\mathbb{C})$. **г)** Докажите, что алгебра Ли группы $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ является комплексификацией алгебры Ли группы $U_n(\mathbb{H})$. **д*)** Докажите, что группа $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ стягивается на свою подгруппу $U_n(\mathbb{H})$.

13. Опишите **а)** максимальный тор, **б*)** систему корней и **в*)** группу Вейля группы Ли $U_n(\mathbb{H})$.

Абстрактно, *системой корней* называется полная система в евклидовом пространстве \mathfrak{h} , удовлетворяющая условию задачи 9а. Если к тому же выполнено условие задачи 9б, то система корней называется *приведенной*.

14. а) Докажите, что для пропорциональных элементов системы корней коэффициент пропорциональности равен ± 1 или ± 2 . **б)** Докажите, что угол между корнями может принимать только значения, кратные $\frac{\pi}{4}$ или $\frac{\pi}{6}$. **в)** Как соотносятся длины корней в каждом из случаев? **г)** Докажите, что в системе корней простой компактной группы Ли длины корней могут принимать не более 2 различных значений.

15. а) Опишите все приведенные двумерные системы корней с точностью до изоморфизма. **б)** Укажите компактные группы с такими системами корней для всех случаев, кроме какого-нибудь одного.

16*. (Группа G_2) Алгебра октав \mathbb{O} – неассоциативная вещественная алгебра, состоящая из пар кватернионов (a, b) с умножением $(a, b)(c, d) = (ac - d\bar{b}, \bar{a}d + cb)$ (где черта обозначает сопряжение в кватернионах: $(x + iy + jz + kt) = x - iy - jz - kt$). **а)** Докажите, что любая тройка попарно антикоммутирующих элементов $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{O}$ такая, что $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = -1$ и $(s_1 s_2) s_3 = -s_3 (s_1 s_2)$, порождает \mathbb{O} . **б)** Докажите, что группа автоморфизмов алгебры октав является односвязной компактной простой группой Ли. **в)** Найдите систему корней этой группы. **г)** Докажите, что группа Ли G_2 изоморфна стабилизатору в $GL_7(\mathbb{R})$ некоторой кососимметрической трилинейной формы на \mathbb{R}^7 (общего положения, т.е. имеющей открытую орбиту).