Статистическая физика.

Листок 2

1. **Сечение рассеяния.**
Рассмотрите рассеяние однородного параллельного пучка точечных частиц, которые налетают параллельно оси z на неподвижное сферическое препятствие в d измерениях. Покажите, что отношение потока Φ_{b}, рассеянного назад, к потоку Φ_{f}, рассеянному вперед, имеет вид

$$\frac{\Phi_{\mathrm{b}}}{\Phi_{\mathrm{f}}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{d-1}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{d-1}} \equiv \lambda_d.$$

Здесь под потоком, рассеянным вперед, понимаются частицы, имеющие положительную z-компоненту скорости (наоборот для рассеянного назад). В частности $\lambda_1 = \infty$ (только рассеяние назад в одномерии), $\lambda_2 = (\sqrt{2}-1)^{-1} > 1$ (преимущественно рассеяние назад в двух измерениях), $\lambda_3 = 1$ (проявление изотропного рассеяния в трёх измерениях).

2. **Одномерный газ.**
Газ частиц в состоянии термодинамического равновесия помещается в одномерную ловушку. Соответствующее состояние описывается описывается начальной одночастичной функцией распределения $f_1(p,q,t=0) = \delta(q)f(p)$, где $f(p) = \exp(-p^2/2mk_BT)/\sqrt{2\pi m k_B T}$.

(а) Стартуя с уравнения Лиуввиля выведите $f_1(p,q,t)$ и изобразите её в плоскости (p,q).

(б) Вычислите средние $\langle p^2\rangle$, $\langle q^2\rangle$.

(в) Предположим, что в $q = \pm Q$ помещены твердые стенки. Опишите, $f_1(p,q,t \gg \tau)$, где τ характерное релаксационное время в системе

3. **Уравнения Власова**
В цепочке ББГКИ имеется 3 характерных временных масштаба.

$$\begin{aligned}
\tau_e^{-1} &\simeq \left|\frac{\partial \Phi_1}{\partial \vec{q}}\right| \frac{1}{|\vec{p}|} \simeq \frac{L}{v} \\
\tau_c^{-1} &\simeq \left|\frac{\partial \Phi_2}{\partial \vec{q}}\right| \frac{1}{|\vec{p}|} \frac{d}{v}. \\
\tau_f^{-1} &\simeq \int \frac{1}{|\Delta\vec{p}|_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vec{q}} \frac{f_{s+1}}{f_s} d^3\vec{p_s} d^3\vec{q_s} \approx \frac{\rho d^3}{\tau_c}
\end{aligned}$$

Уравнения Больцмана выводятся в предположении разреженного газа, $\rho d^3 \ll 1$, что дает $\tau_c \ll \tau_f$. Уравнения Власова выводятся в противоположном пределе плотного газа $\tau_c \gg \tau_f$, в котором членами порядка $1/\tau_c$ пренебрегают по сравнению с $1/\tau_f$.

(a) Предпологая, что плотность вероятности факторизуется, $\rho_s = \prod_{k=1}^{s} \rho_1(\vec{p}_k, \vec{q}_k)$, вычислите плотности f_sи их нормировку.

(b) Покажите, что ББГКИ иерархия эквивалентна единственному уравнению

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial f_1}{\partial \vec{q}_2} - \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}(\vec{q})}{\partial \vec{q}}\frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} = 0,$$

где $\Phi_{\text{eff}}(\vec{q})$ -эффективное среднее поле. Получите выражение для $\Phi_{\text{eff}}(\vec{q})$.

(c) Рассмотрите N частиц в ящике объема V, без внешнего поля. покажите, что любая функция $f_1 = g(\vec{p})/V$ дает стационарное решение уравнения Власова. Почему в уравнении Власова не происходит релакчации к равновесию.

4. **H-теорема.** Рассмотрите газ N молекул во внешнем потенциале $\Phi_1(\vec{q})$.

(a) Докажите, что распределение Больцмана

$$f_1(\vec{p}, \vec{q}) = Z^{-1} \exp\left[\frac{\vec{p}^2/2m + \Phi_1(\vec{q})}{k_B T}\right]$$

минимизирует функцию $H = \int f_1 \ln f_1 d^3\vec{p} d^3\vec{q}$ при условии, что полная энергия фиксирована $U = \langle \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}) \rangle$, и таким образом является не только достаточным, но и необходимым условием равновесия.

(b) Проделайте то же самое для смеси двух газов с массами молекл m_a и m_b: найдите распределениями f^a и f^b, которые минимизируют $H^a + H^b$, и покажите, что среднюю кинетическую энергию можно использовать как эмпирическую температуру.

5. **Классические гармонические осцилляторы.**
Рассмотрите N классических гармонических осцилляторов с координатами и импульсами p_i, q_i и гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\{p_i, q_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_i^2}{2} \right).$$

(a) Вычислите энтропию S как функцию внутренней энергиии U. (Указание: изменением масштабов длины и импульса можно превратить поверхность постоянной энергии в сферу. При больших N объем шарового слоя $2N$-мерного шара можно считать равным объему шара.)

(b) Вычислите энергию U и теплоемкость C_V как функцию температуры T и числа частиц N.

(c) (в) Найдите совместную плотность вероятности импульса и координаты одного осциллятора $P(q, p)$. Вычислите среднюю кинетическую и потенциальную энергию осциллятора.

6. **Квантовые гармонические осцилляторы.**
Рассмотрите N независимых квантовых осцилляторов с гамильтонианом
$$\mathcal{H}(\{n_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + n_i\right),$$
где микросотояние системы задается N квантовыми числами заполнения осцилляторов $n_i = 0, 1, 2, 3, \ldots,\ i = 1, \ldots, N$, принимающими любые неотрицательные целые значения.

   (a) Вычислите энтропию S как функцию внутренней энергии U. (Указание: Число $\mathcal{N}(U)$ состояний с энергией U можно представить, как число способов разложить $M = \sum_i n_i$ шаров в N ящиков, или разделить одномерную цепочку из M шаров $N-1$ стенками.)

   (b) Вычислите энергию U и теплоемкость C_V как функции температуры T, и числа частиц N.

   (c) Найдите вероятность $f_1(n)$ обнаружиить осциллятор на уровне n.

   (d) Прокомментируйте разницу квантового и классического осцилляторов.

7. **Магнитная восприимчивость Кюри.**
Рассмотрите N невзаимодействующих спинов, обладающих магнитными моментами в магнитном поле $\vec{H} = H\vec{e_z}$, находящихся при температуре T. Работа совершаемая магнитным полем равна HM_z, где намагниченность есть полный магнитный момент системы, $M_z = \mu \sum_i m_i$, а μ– размерная константа. Пусть прекция спинов на ось z квантуется, т.е. пробегает дискретный набор $2s-1$ значений, задаваемых целыми числами $m_i = -s, -s+1, \ldots, s-1, s$.

   (a) Вычислите статсумму Гиббса $Z(T, H)$. (Воспользуйтесь тем, что больцмановский вес, соответствующий макросостоянию (T, H), включает в себя работу магнитного поля.)

   (b) Вычислите свободную энергию Гиббса $G(T, H)$, и покажите, что при малых H она равна
$$G(T, H) = G(T, 0) - \frac{N\mu^2 s(s+1)H^2}{6k_B T} + \mathcal{O}(H^4).$$

   (c) (в) Вычислите магнитную восприимчивость в нулевом поле $\chi = \partial M_z/\partial H|_{H=0}$, и покажите, что она описывается законом Кюри
$$\chi = c/T.$$