

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
19 ЯНВАРЯ 2015

Дробно-линейной функцией (д.-л. функцией) называется функция вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

1. Докажите, что д.-л. функция осуществляет взаимно-однозначное конформное отображение $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$.

2. Докажите, что д.-л. отображения образуют группу. Какой группе она изоморфна?

3. Докажите, что д.-л. функция переводит окружности и прямые в окружности (или прямые).

4. Напишите д.-л. функцию, переводящую три произвольные (различные) точки z_1, z_2, z_3 в три другие (различные) точки w_1, w_2, w_3 . Единственна ли она?

5. Докажите, что д.-л. функция сохраняет двойное отношение:

$$\frac{(f(z_1) - f(z_2))(f(z_3) - f(z_4))}{(f(z_1) - f(z_3))(f(z_2) - f(z_4))} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}.$$

6.* Производной Шварца (шварцианом) голоморфной функции $w(z)$ называется выражение

$$S(w; z) := \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''(z)}{w'(z)} \right)^2.$$

Докажите, что $S(w; z) = 0$ тогда и только тогда, когда $w(z)$ – д.-л. функция.

7. Найдите общий вид д.-л. изоморфизмов (а) $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, (б) $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$, (в) $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{H}$ (\mathbb{H} – верхняя полуплоскость, \mathbb{U} – единичный круг).

8. Докажите, что д.-л. преобразование может иметь либо одну неподвижную точку, либо две. В каждом случае укажите общий вид преобразований и их геометрический смысл.