

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО  
12 ЯНВАРЯ 2015

1. Найдите действительные и мнимые части следующих комплексных чисел:

(а)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ , (б)  $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$

2. Найдите модули и аргументы следующих комплексных чисел:

(а)  $(-4+3i)^3$ , (б)  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$

3. Точки  $z_1$  и  $z_2$  — смежные вершины правильного  $n$ -угольника. Найдите вершину  $z_3$ , смежную с  $z_2$  ( $z_3 \neq z_1$ , нумерация против часовой стрелки).

4. Дайте геометрическое описание множеств

(а)  $\{z: |z-z_1| = |z-z_2|\}$ ,

(б)  $\{z: |z-1| + |z+1| = a\}$  ( $a > 1$ ).

5. Решите уравнение  $\bar{z} = z^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

6. Найдите, во что переводят координатную сетку следующие отображения из  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$ :

(а)  $z \mapsto z^2$ ;

(б)  $z \mapsto e^z$ ;

(в)  $z \mapsto 1/z$ .

7. Отображение  $z \mapsto z + (1/z)$  определено на множестве всех ненулевых комплексных чисел.

(а) Во что это отображение переводит множество  $\{z: |z| > 1\}$ ?

(б) Является ли это отображение взаимно-однозначным на данном множестве?

8. Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — отображение, заданное формулой  $z \mapsto z^3$ , и пусть  $C_r$  — окружность радиуса  $r$  с центром в точке 1. При каких  $r$  кривая  $f(C_r)$  имеет самопересечения?

9. (а) Проверьте, что всякое  $\mathbb{R}$ -линейное отображение из  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$  задается формулой

$$z \mapsto Az + \bar{A}\bar{z}. \quad (1)$$

(б) Пусть отображение задано формулой (1). Найдите эксцентриситет эллипса, в который оно переводит окружность с центром в нуле.

(в) Найдите также угол большей оси этого эллипса с действительной осью.