

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2015
ЛИСТОК 2

срок сдачи 20.02.2015

1. Найдите дробно-линейную функцию f , взаимно-однозначно отображающую единичный диск $|z| < 1$ в себя и такую, что $f(0) = 1/2$, $\arg f'(0) = \pi$.
2. Найдите конформное отображение $w = f(z)$ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на диск $|w| < R$ такое, что $f(i) = 0$, $f'(i) = 1$ и определите значение R .
3. Найдите голоморфную функцию, взаимно-однозначно отображающую область Ω на верхнюю полуплоскость \mathbb{H} для следующих областей Ω :
 - а) полоса $a < \operatorname{Im} z < b$,
 - б) полуполоса $a < \operatorname{Im} z < b$, $\operatorname{Re} z > c$,
 - в) $\mathbb{H} \setminus [0, i]$ (верхняя полуплоскость с выкинутым отрезком от 0 до i),
 - г) $\bar{\mathbb{C}} \setminus [0, 1]$ (расширенная комплексная плоскость с выкинутым отрезком от 0 до 1).
4. Найдите голоморфную функцию, взаимно-однозначно отображающую единичный диск $|z| < 1$ на внешность эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b \in \mathbb{R}$).
5. Докажите, что если непостоянная функция f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$, непрерывна в \bar{D} и $|f(z)| = \operatorname{const}$ на ∂D , то f имеет в D хотя бы один ноль.
6. Докажите, что проколотый единичный диск $0 < |z| < 1$ неизоморфен кольцу $a < |z| < b$ ($0 < a < b < \infty$).
7. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, содержащаяся в некотором диске $|z| < R$. Докажите тождества
 - а) $\oint_{\partial D} z^k \bar{z} dz = 2i \iint_D z^k dx dy$, $k \geq 0$,
 - б) $\oint_{\partial D} z^k d\bar{z} = -2ik \iint_D z^{k-1} dx dy$, $k \geq 0$.
8. Вычислите интеграл $\oint_{\gamma} \frac{2z^2 + 5z + 8}{z(z+1)^2} dz$, где контур γ – окружность $|z| = 3$.
9. Пусть $P(z)$ – многочлен. Докажите, что $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R} P(z) d\bar{z} = -R^2 P'(a)$.

Примечание. Все интегралы по замкнутому контуру берутся в положительном направлении (контур обходится против часовой стрелки).