

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2015
ЛИСТОК 3

срок сдачи 06.03.2015

1. Докажите, что если функция f голоморфна в проколотой окрестности точки a и имеет в точке a полюс, то a – существенно особая точка для функции e^f .
2. Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности точки a и $\operatorname{Im} f(z) > 0$ всюду в этой окрестности. Какого типа особенность может быть в точке a ?
3. Пусть функция f голоморфно и взаимно однозначно отображает внешность единичного круга $|z| > 1$ на некоторую область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ и имеет разложение в ряд Лорана вида

$$f(z) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots$$

Докажите, что $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 \leq 1$ и укажите геометрический смысл этого неравенства.

4. Вычислите следующие интегралы, используя вычеты:

а) $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sin^2 z \cos z}$ вдоль окружности $\gamma = \{z : |z| = 10\}$, проходимой против часовой стрелки,

б) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2}$ при $a > b > 0$,

в) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$,

г) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)^2} dx$,

5. Пусть $D \in \mathbb{C}$ – односвязная область, ограниченная гладкой кривой $\gamma = \partial D$, и $w(z)$ – голоморфная функция, взаимно-однозначно отображающая \bar{D} на замыкание единичного круга $\{w : |w| \leq 1\}$.

а) Выразите единичный касательный и нормальный векторы к кривой γ в точках $z \in \partial D$ через граничные значения $w(z)$ и $w'(z)$ (касательный вектор направлен против часовой стрелки, а нормальный – во внешность области D),

б) Выразите кривизну кривой γ через граничные значения w, w', w'' .

6. Производной Шварца (шварцианом) голоморфной функции $w(z)$ называется вы-

ражение $S(w; z) := \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''(z)}{w'(z)} \right)^2$.

а) Проверьте, что

$$S(w; z) = 6 \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta}$$

б) Докажите, что $S(w; z) = 0$ тогда и только тогда, когда $w(z)$ – дробно-линейная функция.

в) Докажите, что шварцианы взаимно-обратных функций $w(z)$ и $z(w)$ связаны соотношением

$$S(w; z) + S(z; w) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = 0$$

г) Пусть $w(z)$ и $f(w)$ – голоморфные функции, а $F(z) = f(w(z))$ – их композиция; докажите следующую формулу для производной Шварца сложной функции:

$$S(F; z) = S(f; w) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + S(w; z)$$